

**Серия 5. ТЧ + ФУРы.**

1. Дано нечётное  $n > 3$ . Докажите, что у числа  $2^{\phi(n)} - 1$  есть простой делитель, которого нет у числа  $n$ .
2. Обозначим  $A$  множество всех простых чисел, делящих  $2^n - 3$ . Докажите, что  $A$  и  $\mathbb{P} \setminus A$  — бесконечные.
3. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что число  $\frac{a^2 + b^2 + 6}{ab}$  — целое. Чему оно может быть равно?
4. а) Обозначим  $P(a)$  — наибольший простой делитель числа  $a^2 + 1$ . Докажите, что существует бесконечно много троек  $a, b, c$  таких, что  $P(a) = P(b) = P(c)$ .
- б) Докажите, что для любого натурального  $N$  существуют  $a > b > N$ , что у чисел  $a^2 + 1$  и  $b^2 + 1$  наборы делителей совпадают.
5. Непрерывная функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $f(0) = 1$  и для любого натурального  $n$  и положительного  $t$  имеет место

$$(f(t))^n = f(\sqrt{nt}).$$

Докажите, что существует такая положительная константа  $c$ , что для любого положительного  $t$  верно  $f(t) = e^{ct^2}$ .

6. Существует ли такая функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(f(x)) = x^2 - 17$ ?
7. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

- 
8. Решите уравнение в целых числах:  $x^5 + y^7 = 10000$ .
  9. Найдите все функции  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такие, что для любых натуральных  $m$  и  $n$ , число  $f(m) + f(n) - mn$  не равно 0 и делит  $mf(m) + nf(n)$ .
  10. Find all functions  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  such that for any  $x, y \in (0, \infty)$ ,

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, у которых сумма делителей — точный квадрат.
12. Решите в натуральных числах  $2^x = 5^y + 3$ .