

Серия 33. UVW-метод решения неравенств

1. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют следующим условиям: $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найдите максимум и минимум выражения $x^3 + y^3 + z^3$.
2. Вещественные числа x, y, z связаны соотношением $x + y + z = 0$. Докажите, что $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geqslant 6xyz$.
3. Даны неотрицательные числа a, b, c . Докажите неравенство

$$(a + b + c)^5 \geqslant 81 \cdot abc \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

6. Положительные числа a, b, c в сумме дают 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

7. (Задача 9.8 финала 2016) Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

8. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что $ab + bc + ca - abc \leqslant 2$.