Разнобой неравенства

1. **Беларусь 2011.** Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что
$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

2. Пусть $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$, а $a \geqslant b \geqslant c$ — вещественные числа. Докажите, что
$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$
Докажите также, что это останется верным, если $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$.

3. Для вещественных чисел a, b, c докажите неравенство
$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geqslant ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2).$$

4. **IMO 2000.** Для положительных a, b, c выполнено, что $abc = 1$. Докажите неравенство:
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

5. **Беларусь.** Пусть m, n — натуральные числа. Докажите неравенство:
$$2\left|\sqrt{2}m - \sqrt{5}n\right| > \frac{5}{2m+3n}.$$

6. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство:
$$\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} \geqslant \sqrt[32]{abc}.$$

7. Разложите выражения $x^3+y^3+z^3-3xyz$ и $(x^2y+y^2z+z^2x)-(xy^2+yz^2+zx^2)$ на множители. Какие условия на числа x, y, z необходимы и достаточны, чтобы эти выражения были положительны?

8. **Вьетнам.** Про вещественные числа x, y, z известно, что $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Докажите неравенство
$$x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 \geqslant xyz(x^2+y^2+z^2).$$