

Обратные остатки

Простые задачи

1. Решите сравнения (найдите все подходящие x и докажите, что других нет):
 - (а) $5x \equiv 2 \pmod{3}$;
 - (б) $3x \equiv 2 \pmod{11}$;
 - (с) $6x \equiv 1 \pmod{13}$.
2. Какой остаток дает $x + y$ при делении на 17, если
 - (а) $x - 16y \equiv 2 \pmod{17}$;
 - (б) $3x \equiv 5 + 14y \pmod{17}$?

Старые задачи

3. Дано простое число p и его некоторый ненулевой остаток a .
 - (а) Докажите, что в последовательности $0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю p .
 - (б) Докажите, что существует и при том единственный остаток b , что $ab \equiv 1 \pmod{p}$ (такой остаток b называется *обратным* остатка a).
 - (с) Какие остатки совпадают со своими обратными остатками?
4. (а) (**Теорема Вильсона**) Пусть p — некоторое простое число. Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
(б) (**Обратная теорема Вильсона**) Докажите, что если $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, то число n — простое.

Новые задачи

5. Пусть a_1, \dots, a_p — конечная арифметическая прогрессия с разницей, не кратной p . Докажите, что существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p^2 .
6. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.
7. Пусть a_1, a_2, \dots, a_k — все остатки при делении на n , такие, что у каждого из них есть обратный остаток.
 - (а) Докажите, что $a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_k \equiv \pm 1 \pmod{n}$;
 - (б) (**Обобщение Гаусса теоремы Вильсона**) Докажите, что

$$a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_k \equiv \begin{cases} -1 \pmod{n}, & n = 4, p^\alpha, 2p^\alpha; \\ 1 \pmod{n}, & n \neq 4, p^\alpha, 2p^\alpha. \end{cases}$$

8. (а) Преобразуем сумму $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100}$ в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на 101.

(б) Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p .

(в) Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2 .

(г) (**Теорема Вольстенхольма**) Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ выполняется сравнение

$$C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p^3}.$$