Серия 25. Системы линейных уравнений

Рассмотрим *систему линейных уравнений* (далее СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Все коэффициенты a_{ij} и b_i являются элементами некоторого поля $\mathbb{K}$ (в этом листике $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Две СЛУ будем называть *эквивалентными*, если у них в точности совпадают множества решений. СЛУ называется *однородной*, если все $b_i = 0$.

1. Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ 2x + 7y + 3z = 2, \\ -x - 3y = 3, \\ 3x + 10y + 5z = 7. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 15, \\ 7x + 8y + 9z = 24. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Проанализировав метод Гаусса, докажите следующие утверждения о СЛУ:
(a) Если в **однородной** СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого (следовательно, бесконечно много решений: ненулевое решение можно домножать на любую константу).
(b) Некоторая **однородная** СЛУ с одинаковым числом уравнений и неизвестных имеет единственное решение. Докажите, что любая **неоднородная** СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение.
(c) Предположим, что X_0 — множество решений некоторой **однородной** СЛУ$_0$. Докажите, что множество решений X некоторой **неоднородной** СЛУ$_1$ с такой же левой частью либо пусто, либо представляется в виде $X = X_0 + \mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — произвольное решение СЛУ$_1$.
(d) Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение.

3. У Пети было 10 яблок, вес каждого — вещественное положительное число. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что Петя сможет приписать каждому яблоку цену в целое число рублей так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

4. *(Дискретное уравнение теплопроводности)* Имеется клетчатая таблица $(k+2)\times(l+2)$. В её граничных клетках («в рамочке») расставлены произвольные вещественные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно единственным образом расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

5. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. *Отмеченной* точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

6. Даны три однородных квадратичных многочлена с вещественными коэффициентами: $P(u, v)$, $Q(u, v)$ и $R(u, v)$ (т. е. каждый из них имеет вид $Au^2+Buv+Cv^2$). Докажите, что существует ненулевой однородный квадратичный многочлен $F(x, y, z)$ с вещественными коэффициентами такой, что $F(P(u, v), Q(u, v), R(u, v)) = 0$ при всех u и v.

7. Имеется 101 корова. Известно, что любые 100 коров можно разбить на два стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково, если известно, что
(a) масса каждой коровы целое число граммов (масса коровы может быть отрицательной);
(b) масса каждой коровы рациональное число граммов;
(c) масса каждой коровы действительное число граммов.

8. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?