

# Вектора и скалярное произведение

## Примеры

- Найдите угол между диагоналями  $AD$  и  $BF$  в правильном шестиугольнике  $ABCDEF$ .
- Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

## Задачи

- (а) Пусть  $A, B, C$  и  $D$  — произвольные точки плоскости. Докажите, что  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .  
(б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.  
(в) Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перпендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.
- (а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.  
(б) Дан прямоугольник  $ABCD$  и точка  $P$ . Докажите, что  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$ .  
(в) Дан прямоугольник  $ABCD$  и точка  $P$ . Прямые, проходящие через  $A$  и  $B$  и перпендикулярные, соответственно,  $PC$  и  $PD$ , пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что  $PQ \perp AB$ .
- Пусть  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — ортоцентр и  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .  
(а) Докажите, что  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .  
(б) Выведите из этого, что точки  $M, H, O$  лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем  $MH = 2 \cdot OM$ .  
(в) Докажите, что  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ .
- Четырёхугольник  $ABCD$  вписанный. Пусть  $H_a$  — ортоцентр треугольника  $BCD$ , а  $M_a$  — середина отрезка  $AH_a$ . Аналогично определим  $M_b, M_c$  и  $M_d$ . Докажите, что  $M_a, M_b, M_c$  и  $M_d$  совпадают.
- Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ),  $D$  — середина стороны  $AB$ , а  $E$  — точка пересечения медиан треугольника  $ACD$ . Докажите, что  $OE \perp CD$ .