**[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс]**

Афризонов Д., Кушнир А.

[*2018–2019*] группа: 9-2 *26 ноября 2018 г.*

# Серия 14. Многочлены

**1.** Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

**2.** Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что уравнение $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_{10}) = (x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot \ldots \cdot (x + a_{10})$ будет иметь ровно пять различных действительных корней.

**3.** Последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x), ...$ определена как $P_0(x) = x$, $P_{n+1} = P_n(x-1)P_n(x+1)$. Найдите наибольшее натуральное $k$, для которого $P_{2018}(x)$ делится на $x^k$.

**4.** Вася перемножил несколько квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$ ($p$ и $q$ — вещественные) и в результате получил многочлен, все коэффициенты которого положительны. Докажите, что хотя бы у одного из исходных трёхчленов все коэффициенты были также положительны.

**5.** Известно, что некоторый многочлен с вещественными коэффициентами в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

**6.** Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени $n$ с вещественными коэффициентами принимает целые значения в точках $x = 0, 1, 2 \ldots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

**7.** Дано $n$ вещественных чисел, $p$ — их произведение. Разность между $p$ и каждым из этих чисел — целое нечётное число. Докажите, что все данные $n$ чисел иррациональны.

**8.** Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $h(x)$, графики которых имеют общую точку, и $g(x)$ — многочлен, отличный от константы (все коэффициенты многочленов $f, g, h$ — вещественные). Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех вещественных $x$. Докажите, что $f(x) = h(x)$.