Серия 13. Перестановки, ликбез

Определение 1. *Транспозиция* — перестановка, которая меняет два элемента местами, а все остальные оставляет неподвижными. Т. е. циклическая перестановка длины два, обозначать можно (i, j). *Элементарной транспозицией* называется транспозиция, меняющая два соседних элемента местами $(i, i+1)$.

1. Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения элементарных транспозиций.

2. В городе разрешаются только *парные обмены квартир* (это когда несколько жителей города бьются на непересекающиеся пары и внутри пар меняются квартирами). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

Определение 2. Перестановка σ разложена в произведение транспозиций. Тогда *чётностью* перестановки σ называется чётность количества этих транспозиций.
Определение 3. *Инверсией* перестановки σ называется такая пара чисел i, j, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

3. **(a)** Докажите, что при домножении на элементарную транспозицию изменяется чётность числа инверсий.
(b) Докажите, что четность перестановки определена корректно (т. е. чётность числа транспозиций не зависит от выбора разложения).

4. **(a)** Зная чётность двух перестановок из S_n можно ли определить чётность их произведения?
(b) Перестановка раскладывается в произведение циклов длины $d_1, \ldots, d_k$. Найдите чётность перестановки.

5. Какие перестановки можно получить, перемножая циклы длины 3?

6. **Игра «пятнашки».** В квадрат 4×4 кладут 15 фишек, на которых и написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации нельзя получить вторую.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

7. После усердных тренировок Вася в совершенстве овладел навыком сборки кубика Рубика. Он уверяет, что может даже собрать кубик Рубика, у которого перевернули ровно один из боковых кубиков (то есть тот, что с двумя цветными гранями). Можно ли верить этому Васе?

8. В ресторане есть n юношей, n девушек и n столов. За каждым столом сидят один юноша и одна девушка. На каждом столе написано, за какой номер стола должен пересесть сидящий за ним юноша и за какой стол сидящая за ним девушка. Каждые десять минут все посетители ресторана пересаживаются в соответствии с номерами, указанными на их столах. При каких n можно так написать числа на столах, что в итоге каждый юноша посидит с каждой девушкой и каждый из пришедших посидит за каждым столом?