[2018–2019]

группа: 9-2

11 октября 2018 г.

## Серия 8. Разнобой по неравенствам

**0.** (*Неравенство Несбита*) Для любых положительных чисел  $a,\,b,\,c$  выполнено

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**1.** Даны произвольные неотрицательные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$xy + yz + xz \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$$
.

**2.** Докажите, что для любого положительного значения a верно неравенство

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geqslant 16.$$

**3.** Для произвольных положительных чисел a, b и c докажите, что

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

- **4.** Положительные числа a,b,c таковы, что  $ab+bc+ac\geqslant a+b+c$ . Докажите, что  $a+b+c\geqslant 3$ .
- **5.** Докажите, что при всех положительных x, y, z выполнено неравенство:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z.$$

**6.** Положительные числа a,b,c удовлетворяют соотношению a+b+c=1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

7. (Частный случай неравенства Шура) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c верно

$$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

**8.** Числа a, b, c положительны. Докажите, что

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leqslant \frac{3}{4}.$$

**9.** Для любых неотрицательных чисел x, y, z докажите, что

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geqslant 3\sqrt{xy + yz + zx}.$$