

Серия 9. Разной по неравенствам, часть 2

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $\frac{3}{abc} \geq a+b+c$. Докажите неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a+b+c$.

2. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} + \frac{1}{1+a+b} \leq 1.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108 \cdot (ab + bc + ca) \leq \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \right)^4.$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$