

## Серия 10. Однородные неравенства

1. Для положительных  $a, b, c$  докажите неравенство:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq \frac{1}{2} \cdot (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3).$$

2. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Докажите, что

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

3. Для положительных  $a, b, c, d$  докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

4. Let  $a, b, c$  be positive real numbers with  $abc = 1$ . Prove that

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Для положительных  $a, b, c$  верно, что  $a + b + c = ab + bc + ca$ . Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

6. Положительные числа  $x, y, z$  связаны соотношением  $xyz = 1$ . Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

## Определения

Однородным симметрическим многочленом, порождённым упорядоченным набором целых неотрицательных чисел  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , называют выражение

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdot x_{\sigma(2)}^{a_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

где суммирование ведётся по множеству  $S_n$  всех перестановок  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Примеры:

$$T(3, 2, 1) = x^3 y^2 z + y^3 z^2 x + z^3 x^2 y + x^3 z^2 y + z^3 y^2 x + y^3 x^2 z;$$

$$T(1, 1, 0) = 2 \cdot (xy + yz + zx);$$

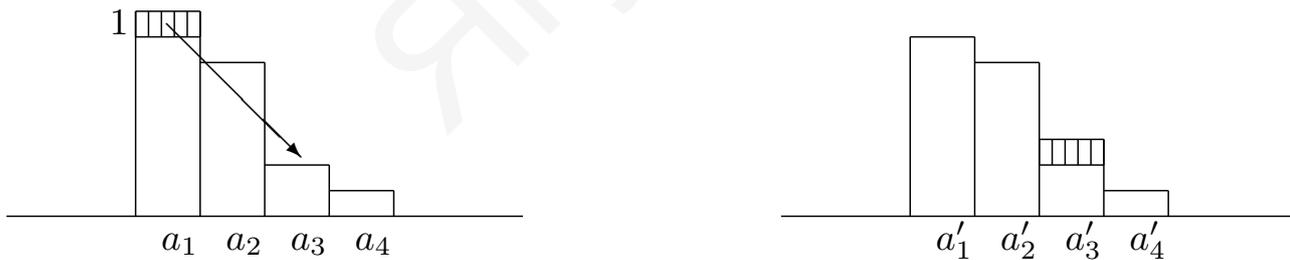
$$T(1, 1, 1) = 6xyz.$$

Предположим, что нам даны два упорядоченных набора целых неотрицательных чисел  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Будем говорить, что набор  $a_i$  мажорирует набор  $b_i$  (запись  $a_i \succ b_i$ ), если диаграмму Юнга набора  $a_i$  можно преобразовать в диаграмму Юнга набора  $b_i$  с помощью нескольких операций сбрасывания кирпича, определённых ниже.

Операцией сбросить кирпич с места  $i$  на место  $j$  (где  $1 \leq i < j \leq n$ ) назовём преобразование упорядоченного набора целых неотрицательных чисел  $a_i$  в набор  $a'_i$ , заданное следующим образом:

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \rightarrow \\ \rightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j + 1, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Операция осуществима, только если новый набор  $a'_i$  сохраняет свою монотонность.



**Неравенство Мюрхеда.** Если  $a_i \succ b_i$ , то при всех положительных  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq T(b_1, b_2, \dots, b_n).$$