

## Серия 19. Лемма об уточнении показателя

Для простого  $p$  и целого  $n$  будем символом  $ord_p(n)$  обозначать степень вхождения простого множителя  $p$  в разложение числа  $n$  на простые множители.

**Лемма об уточнении показателя.** Пусть  $a$  и  $b$  — различные целые числа,  $k$  — натуральное,  $p$  — простое, не являющееся делителем  $a$ , и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда  $ord_p(a^k - b^k) = ord_p(a - b) + ord_p(k)$ .

Условие 1:  $p \neq 2$  и  $a - b$  делится на  $p$ .

Условие 2:  $p = 2$  и  $a - b$  делится на 4.

**Следствие.** Пусть  $k$  — нечетное,  $p$  — простое,  $a, b$  не делятся на  $p$  и  $a + b$  делится на  $p$ . Тогда  $ord_p(a^k + b^k) = ord_p(a + b) + ord_p(k)$ .

1. Даны простое число  $p$ , натуральные  $k$  и  $s$ , различные целые  $a$  и  $b$ , такие, что  $a - b$  делится на  $p$ , причём  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ .
  - (а) Докажите, что  $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a - b)$ .
  - (б) Докажите, что  $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a - b)$ , если  $s$  не кратно  $p$ .
  - (в) Докажите, что  $ord_p(a^k - b^k) \geq ord_p(a - b) + ord_p(k)$ .
  - (г) Докажите, что если  $p > 2$ , то  $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a - b) + 1$ .
  - (е) Докажите лемму об уточнении показателя.
2. Найдите показатель числа
  - (а) 2017
  - (б) 2019
 по модулю  $2^{2017}$ .
3. Сколькими нулями оканчивается число  $4^{5^6} + 6^{5^4}$ ?
4. Докажите, что показатель числа 2 по модулю  $3^n$  равен  $\varphi(3^n)$ .
5. Решите в натуральных числах уравнение  $3^x = 2^x y + 1$ .
6. Пусть  $x, y, p, n, k$  — натуральные числа, причём  $n$  — нечетное, а  $p$  — нечетное простое. Докажите, что если  $x^n + y^n = p^k$ , то  $n$  является степенью числа  $p$ .
7. (а) Докажите, что для любого натурального  $a > 2$  найдется такое натуральное  $n$ , что  $a^n - 1$  делится на  $n^2$ . (б) Верно ли это утверждение для  $a = 2$ ?
8. Найдите все натуральные  $n$ , для которых существуют такие натуральные числа  $x, y, k$ , что  $\text{НОД}(x, y) = 1, k > 1$  и  $3^n = x^k + y^k$ .