

## Серия 32. Хардкорная комбинаторика

1. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки  $1 \times 1$ . В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты  $(i, j)$  и поставить по фишке в клетки  $(i + 1, j)$  и  $(i, j + 1)$ , при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.
2. У Леши есть несколько непустых подмножеств конечного множества  $A$ . Если произвольно выбрать нечетное число Лешиних подмножеств, то обязательно найдется элемент, входящий в нечетное число выбранных. Докажите, что существует такое  $T \subset A$ , что  $T$  имеет с каждым Лешиним подмножеством нечетное число общих элементов.
3. Прямоугольник  $m \times n$  склеен в тор. Докажите, что число способов его разрезать на прямоугольники чётной площади чётно (разрезания, отличающиеся друг от друга поворотом тора, считаются разными).
4. Рёбра графа покрашены в четыре цвета таким образом, что для любого пути из трёх рёбер первое и третье ребро пути покрашены в разные цвета (начало и конец пути могут совпадать). Докажите, что вершины этого графа можно покрасить в четыре цвета правильным образом.