

Серия 13. Перестановки, ликбез

Определение 1. Перестановка σ разложена в произведение транспозиций. Тогда *чётностью* перестановки σ называется чётность количества этих транспозиций.

Определение 2. *Инверсией* перестановки σ называется такая пара чисел i, j , что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- (а) Докажите, что при домножении на транспозицию меняется чётность числа инверсий.

(б) Докажите, что четность перестановки определена корректно (т. е. чётность числа транспозиций не зависит от выбора разложения).

(с) Перестановка раскладывается в произведение циклов длины $d_1, \dots, d_k$. Найдите чётность перестановки.
- В ряд стоит 2018 чашек. За один ход разрешается взять четыре подряд идущие чашки и переставить их в обратном порядке. Можно ли такими операциями переставить все чашки в обратном порядке?
- Какие перестановки можно получить, перемножая циклы длины 3?
- Игра «пятнашки».** В квадрат 4×4 кладут 15 фишек, на которых и написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации нельзя получить вторую.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- В городе разрешаются только *парные обмены квартир* (это когда несколько жителей города быются на непересекающиеся пары и внутри пар меняются квартирами). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.
- После усердных тренировок Вася в совершенстве овладел навыком сборки кубика Рубика. Он уверяет, что может даже собрать кубик Рубика, у которого перевернули ровно один из боковых кубиков (то есть тот, что с двумя цветными гранями). Можно ли верить этому Васе?
- В ресторане есть n юношей, n девушек и n столов. За каждым столом сидят один юноша и одна девушка. На каждом столе написано, за какой номер стола должен пересесть сидящий за ним юноша и за какой стол сидящая за ним девушка. Каждые десять минут все посетители ресторана пересаживаются в соответствии с номерами, указанными на их столах. При каких n можно так написать числа на столах, что в итоге каждый юноша посидит с каждой девушкой и каждый из пришедших посидит за каждым столом?
- На берегу круглого острова расположены n городов. Они соединены между собой двусторонними авиалиниями, причём из каждого города можно улететь ровно в один другой. Кроме того, на острове есть кольцевая железная дорога: из каждого города доехать до следующего по часовой стрелке города на поезде. Путешественник Вася заметил, что если он совершает 6 поездок, чередуя эти два вида транспорта, то он непременно возвращается в исходный город. Докажите, что n не делится на 4.