Калькулятор

-3. Докажите, что любое десятичное число единственным образом представляется в двоичном виде (как и в десятичной системе, имеется в виду число, начинающееся не с нуля, то есть с единицы): придумайте явный способ и переведите в двоичную систему числа $10, 444, 2^n, 2^n-1$.

-2. a) Две двоичные цифры складываются «в столбик» по следующим правилам: $0+0=0$; $0+1=1=1+0$; $1+1=10$, то есть в последнем случае происходит переход через разряд. Докажите, что такое вычисление даёт правильный результат. **b)** Так же происходит сложение в столбик произвольного количества двоичных чисел любой длины: в каждом разряде пишется 0, если суммируется чётное количество единиц, и 1 иначе, а в следующий разряд записывается число единиц, равное частному от деления этого количества пополам. Проверьте вычисление на шестизначном (двоичном) примере — переведите десятичные числа в двоичные, сложите по новым правилам, переведите обратно, проверьте результат. Докажите, что такое вычисление всегда даёт правильный результат.

-1. Точно так же, аналогично десятичной системе, определяется умножение в столбик: под единицами нижнего сомножителя переписывается верхний сомножитель с нужным сдвигом, а под нулями ничего не происходит; после чего полученные числа складываются по описанным правилам сложения. Докажите, что такое вычисление всегда даёт правильный результат.

0. Какое максимальное количество знаков может иметь сумма двоичных чисел длин n_1 и n_2? А произведение?

1. Теперь, используя булевы функции $\vee, \wedge, \neg$, получите функцию сложения двух двоичных цифр.

2. Получите функцию сложения **a)** двух двузначных двоичных чисел; **b)** трёх двузначных двоичных чисел; **c)** двух восьмизначных двоичных чисел; **d)** умножения двух трёхзначных двоичных чисел.

3. Придумайте какую-нибудь систему рисовать десятичную цифру (например, возьмите почтовую или из калькулятора), и получите булеву функцию, сопоставляющую четырёхзначному двоичному числу набор элементов, зажигающихся на дисплее при выводе цифры, равной этому числу. Как быть, если число больше 9?

4. Получите булеву функцию от трёх переменных: $x \pm y$. Сколько у неё выходов?

5. Получите булеву функцию от шестизначного двоичного числа, сопоставляющую ему 1, если оно делится на 3, и 0 иначе.

6*. Предположим, что вы располагаете заводскими чёрными коробочками со входами и выходами, реализующими функции остатка при делении одного двоичного числа на другое. Получите булеву функцию, сопоставляющую двоичному числу 1, если оно простое, и 0 иначе.

7. Сколько существует разных **a)** унарных; **b)** бинарных; **c)** n-арных; **d)** функций, сопоставляющих n битам k бит?

8. Опишите в каком-нибудь понятном виде все бинарные функции. Какие из них уже встречались нам?

9. Докажите, что с помощью $\vee, \wedge, \neg$ можно получить любую бинарную функцию. Можно ли убрать из этого набора $\wedge$? А $\neg$?

10. Докажите, что с помощью $\vee, \wedge, \neg$ можно получить любую функцию произвольной арности. Поэтому, если мы хотим проверить, достаточно ли заказывать на заводе какой-то набор функций, чтобы построить любую логическую схему, надо проверить, можем ли мы из этого набора собрать $\vee, \wedge, \neg$.

11*. Существует ли унарная функция, чтобы её одной хватило на любую логическую схему? А бинарная? Для каждой бинарной функции опишите набор бинарных функций, которые из неё можно получить.

12*. *Код Хэмминга:* придумайте функцию $f\colon B^4 \to B^7$ и её «расшифровку» $\hat{f}\colon B^7 \to B^4$ следующим образом. Вы устанавливаете на один компьютер функцию f, а на другой, с ним связанный, $\hat{f}$. При передаче четырёхзначного числа с одного на другой при помощи функции f может (а может и не) вкрасться ошибка в одном бите. Однако $\hat{f}$ должна обнаружить эту ошибку и восстановить исходное число. Можно ли придумать g и $\hat{g}$, обладающие тем же свойством, если $g\colon B^4 \to B^6$?

Ягубов.РФ