Кружок МЦНМО 8 класс **28 октября 2017**

Логика высказываний

0. Перед вами таблица истинности для основных логических функций. Постройте таблицу для функций а)$A \wedge \neg B \vee B$ б) $(A \vee B) \to A \wedge B$ в) $A \wedge B \vee \neg C$. Помните о порядке действий.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
Л	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л
И	И	И	И	И

1. Высказывание «Этот носорог зеленый или летающий» переводится в алгебру логики как $A \vee B$. Высказывание «Если этот носорог зеленый, то он — летающий» как $A \to B$. Придумайте любые интерпретации выражений (не обязательно про носорогов):
а)$(A \vee B) \to A \wedge B$
б) $A \vee B \wedge \neg A$
в) $(A \to B) \to B$
г) $(A \to B) \vee (B \to A)$

2. Выражение $A \vee \neg A$ является *тавтологией*. Это означает, что оно при любом значении переменных истинно (В нашем случае переменная здесь только одна - А).
а) Придумайте тавтологию с тремя переменными.
б)Придумайте тавтологию, не содержащую операцию отрицания ¬.

3. Какие из приведенных ниже формул являются тавтологиями:
а) $A \vee \neg (A \vee \neg A)$; б) $A \wedge \neg A$; в) $\neg(A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$; г) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee B)$; д) $\neg\neg A \Rightarrow A$;

4. Высказывание «Существует зеленый носорог» переводится в алгебру логики как $\exists x$: $F(x)$. Здесь $F(x)$ - некоторая логическая функция, зависящая от переменной x. Выражение «$\exists x$: $F(x)$» будет истинным, если в таблице истинности $F(x)$ есть хоть одно значение x, такое, что $F(x)$ истинно. При этом $F(x)$ не обязательно булева функция, она может быть определена на любом множестве, главное, чтобы она принимала значения в множестве {Л, И}.
$\exists$ *называют квантором существования*. Аналогично определяется *квантор общности* $\forall x$: $F(x)$. Это выражение будет истинным, если $F(x)$ — тавтология.
«Переведите» на русский язык следующие утверждения, не используя *x*, *n*, *k*, A, B, M, *i*, *j*.

1) $\forall x \in \mathrm{R}\ \exists n \in \mathrm{N} : n > x$; 2) $\forall n \in \mathrm{Z}\ \exists k \in \mathrm{N}$: $k \leq 3$ и $n + k \,\vdots\, 3$;

3) Пусть M – внутренность треугольника $A_1A_2A_3$, тогда $\forall B \in M\ \exists i$: $\forall k \neq j$ $BA_i < A_kA_j$, где $i,j,k \in \{1, 2, 3\}$

5. Кванторы тесно связаны между собой и выражаются один через другой. Можно сказать «для любого *x* выполняется A(*x*)», а можно сказать «не существует такого *x*, для которого не выполняется A(*x*)». На этом свойстве основан способ построения отрицания высказываний, содержащих кванторы. Следует только заменить все кванторы всеобщности на кванторы существования, а все кванторы существования – на кванторы всеобщности и исправить заключение на противоположное. Помните, что для составления отрицаний к утверждениям без кванторов никакие кванторы не добавляются.

а)Точка А называется *предельной* точкой множества М, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка В, принадлежащая М, такая, что $|AB| < \varepsilon$.

б) Число d называется *диаметром* плоской фигуры М, если для любых двух точек А и В этой фигуры $|AB| \leqslant d$, а для любого числа $d_1 < d$ найдутся точки М и К такие, что $|MK| > d_1$.

Запишите с помощью кванторов определение того, что а) точка А не является предельной; б) число d не является диаметром данной фигуры.

6.Считая, что не легкая = трудная, постройтее противоположенное определение.
Назовем контрольную легкой, если ...
... все справились с заданием.
... все решили хотя бы одну задачу.
... каждый решил не менее двух задач.
... никто не получил двойку.
Назовем контрольную трудной, если ...
... никто не решил все задачи.
... есть человек, который не справился со всеми задачами.
... никто не получил пятерку.
... более полкласса получили двойки.

Сложнее:
Назовем контрольную легкой, если ...
... нет двоек и каждый решил хотя бы одну задачу.
... есть пятерки и каждый решил хотя бы половину задач.
Назовем контрольную трудной, если ...
... нет пятерок и у каждого есть хотя бы одна ошибка.
... есть двойки или каждый сделал менее половины задач.

7*.Польский логик Лукасевич предлагал обходиться без скобок, записывая в формулах сначала знак операции, а потом операнды (без пробелов и разделителей). Например, $(a \vee b) \wedge (c \vee (d \wedge e))$ в его обозначениях запишется как $\wedge\vee ab\vee c\wedge de$. Эту запись ещё называют польской записью. Докажите, что порядок действий восстанавливается однозначно.