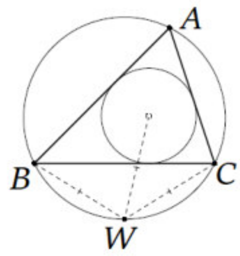
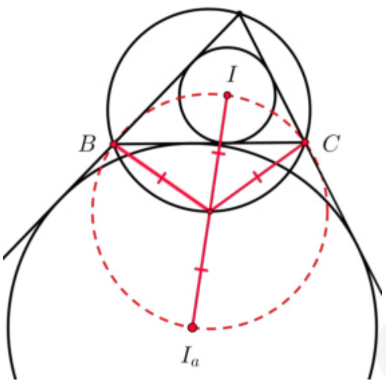
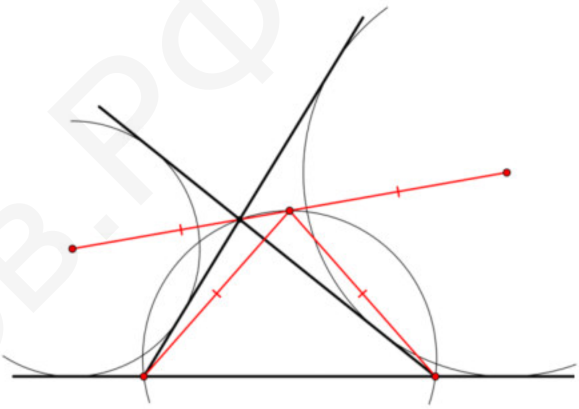
# Лемма о трезубце




**Задача 1 (Лемма о трезубце/теорема трилистника).** Середина дуги $BC$ (не содержащей точки $A$) описанной окружности треугольника $ABC$ равноудалена от $B$, $C$ и точки пересечения биссектрис этого треугольника.

**Задача 2 (Теоремы о куриной лапке).**
а) Середина меньшей дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$ равноудалена от точек $B$, $C$, центра вписанной окружности и центра вневписанной окружности, касающейся стороны $BC$.



б) Середина большей дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$ равноудалена от точек $B$, $C$ и двух центров вневписанных окружностей, касающихся сторон $AB$ и $AC$.

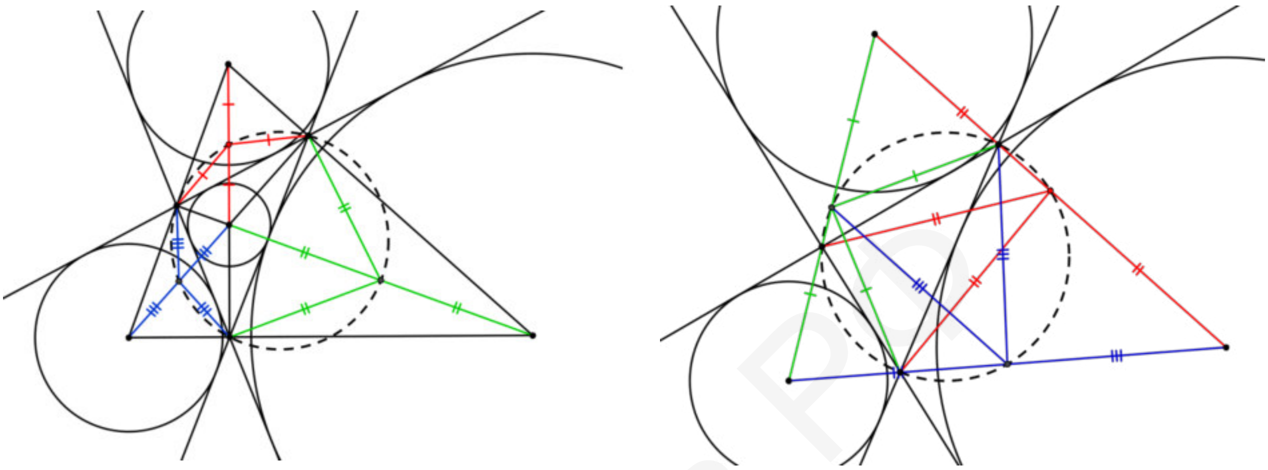
Итак, точка $W$ является:
*1) серединой дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$*
*2) центром окружности, описанной около треугольника $BIC$*
*3) точкой пересечения биссектрисы угла $A$ треугольника $ABC$ и серединного перпендикуляра к стороне $BC$*
*4) центром окружности, описанной около четырёхугольника $BICI_a$*

Кроме того, получаем, что *описанная окружность делит отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, пополам.*

**Задача 3.** Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$, точка $M$ — середина стороны $AC$, а точка $W$ — середина не содержащей $C$ дуги $AB$ описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении $I$ делит отрезок $CW$?

# Лемма о трезубце (продолжение)

**Задача 4 (Окружность 9 точек/Эйлера).** Докажите, что основания высот произвольного треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.



**Задача 5.** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно, а $O$ — центр описанной окружности треугольника $BCI$. Докажите, что $\angle ODB = \angle OEC$.

**Задача 6.** На дугах $AB$ и $BC$ окружности, описанной около треугольника $ABC$, выбраны соответственно точки $K$ и $L$ так, что прямые $KL$ и $AC$ параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников $ABK$ и $CBL$ равноудалены от середины дуги $ABC$.

**Задача 7.** Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Внутри треугольника выбрана такая точка $P$, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка $P$ совпадает с точкой $I$.

**Задача 8.** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Точка $J$ — центр вневписанной окружности, касающейся стороны $BC$. Точки $M$ и $N$ — середины $JD$ и $JE$. Прямые $BM$ и $CN$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что $P$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.