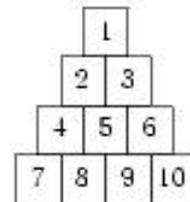


## Планарность

**Задача 0.** Переложите пирамиду из 10 кубиков (см. рисунок) так, чтобы её форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.



**Определение 1.** *Планарный граф* — граф, который может быть изображён на плоскости без пересечения рёбер.

**Задача 1.** Планарен ли граф вершинами которого являются а) 3 б) 4 в) 5 домов, а рёбрами тропинки между этими домами, если каждый дом соединён с каждым тропинкой.

**Задача 2.** Планарно ли произвольное дерево?

▷ В прошлый раз мы доказали для дерева следующее соотношение:  $V - P = 1$ . Попробуем в этот раз найти соотношение, которое будет выполняться для всех планарных графов.

**Определение 2.** *Грань* — область, ограниченная рёбрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и рёбер графа. Внешняя часть плоскости тоже образует грань.

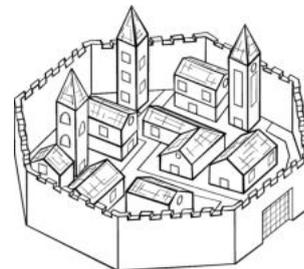
**Задача 3.** Сколько граней у планарных графов из задачи 1?

**Задача 4 (Формула Эйлера).** Докажите, что для связного планарного графа выполнено соотношение  $V - P + \Gamma = 2$ .

**Задача 5.** В стране Озёрная 7 озёр, соединённых между собой 10 непересекающимися каналами, причём от каждого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

## Планарность

**Задача 6.** В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.



**Задача 7.** Изобразим трёхмерные фигуры на плоскости. Планарен ли граф а) куба б) тетраэдра в) октаэдра г\*) произвольного многогранника?

**Задача 8.** Грани некоторого многогранника раскрашены в два цвета так, что соседние грани имеют разные цвета. Известно, что все грани, кроме одной, имеют число рёбер, кратное 3. Докажите, что и эта одна грань имеет кратное 3 число рёбер.

**Задача 9.** Докажите, что для планарного графа справедливо неравенство  $2P \geq 3G$ .