

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Приводятся варианты курсовых работ по курсу "Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа". В начале в краткой форме приводятся необходимые определения и утверждения без доказательств, используемые при решении предложенных задач.

Предисловие

Так как курсовая работа проводится параллельно с чтением самого курса, то в задание включены как стандартные задачи, так и задачи повышенной сложности. Они отмечены звездочкой. В начале приводится более или менее полный список необходимых определений и формул. Задачи в части "Дифференциальная геометрия" заимствованы в основном из задачников [6] и [7], а также из учебника [4].

§ 1. Кривые на плоскости и в пространстве

Пусть задана кривая на плоскости:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (1.1)$$

Ее кривизна k вычисляется по формуле

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Назовем *кругом кривизны* кривой в данной точке M круг, который

1) касается кривой в точке M (т. е. имеет с ней общую касательную в этой точке);

2) направлен выпуклостью вблизи точки M в ту же сторону, что и кривая;

3) имеет ту же кривизну, что и кривая в точке M .

Если кривая задана уравнениями (1.1), то координаты (ξ, η) центра круга кривизны выражаются формулами

$$\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{y}, \quad \eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x}. \quad (1.2)$$

Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее *эволютой*.

Пример 1. Найдем эволюту параболы $y = \frac{x^2}{2}$. По формулам (1.2) находим координаты центра кривизны:

$$\xi = -x^3, \quad \eta = 1 + \frac{3}{2}x^2.$$

Это и есть параметрические уравнения эволюты параболы (где x в роли параметра). Исключая из этих уравнений x , получаем

$$\xi^2 = \frac{8}{27}(\eta - 1)^3.$$

Мы видим, что эволютой параболы служит полукубическая парабола (сделайте чертеж!). $\square$

Пусть задана кривая в пространстве

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (a \leq t \leq b). \quad (1.3)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (a \leq t \leq b).$$

Кривая считается гладкой, т. е. функции x, y, z считаются дифференцируемыми необходимое количество раз (можно сразу считать, что это функции класса C^∞).

Кривизна k и кручение κ кривой вычисляются по формулам

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad \kappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}. \quad (1.4)$$

Пример 2. Вычислим кривизну и кручение кривой

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t}).$$

Имеем

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t, \sqrt{2}, -e^{-t}), \quad \mathbf{r}''(t) = (e^t, \sqrt{2}, e^{-t}), \quad \mathbf{r}'''(t) = (e^t, 0, -e^{-t}). \quad (1.5)$$

Отсюда по формулам (1.4) находим

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t}, \quad \kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t}. \quad (1.6)$$

$\square$

Введем векторы

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \beta = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}, \quad \nu = \beta \times \tau. \quad (1.7)$$

Они образуют в каждой точке кривой так называемый *репер Френе*. Вектор τ направлен по касательной, векторы ν и β – единичные векторы *главной нормали* и *бинормали* соответственно.

Имеют место *формулы Френе*:

$$\begin{cases} \dot{\tau} = & k\nu, \\ \dot{\nu} = & -k\tau & + \kappa\beta, \\ \dot{\beta} = & & -\kappa\nu \end{cases}$$

(в первой формуле считается, что $k \neq 0$).

Пример 3. Найдем репер Френе кривой из примера 2 в точке $t = 0$. На основании формул (1.5) и (1.7) легко находим:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, \sqrt{2}, 1), \quad \nu = \frac{1}{4\sqrt{3}}(2, 2\sqrt{2}, -6), \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\sqrt{2}, -2, 0). \quad \square$$

Формулы

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s)$$

где s – натуральный параметр (длина дуги) называются *натуральными уравнениями* кривой.

Пример 4. Найдем натуральные уравнения кривой из примера 2. Имеем

$$s = \int_0^t |r'(u)| du = \int_0^t \sqrt{2 + e^{2u} + e^{-2u}} du = \int_0^t 2 \operatorname{ch} u = 2 \operatorname{sh} t.$$

Так как $\operatorname{ch}^2 t = \operatorname{sh}^2 t + 1$, из формул (1.6) получаем натуральные уравнения

$$k = \kappa = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}. \quad \square$$

§ 2. Поверхности

Пусть задана поверхность

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Касательная плоскость к поверхности в точке M проходит через эту точку параллельно векторам $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Единичный вектор нормали

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Этот вектор определен однозначно с точностью до направления. Выбор направления задает ориентацию поверхности.

Первой квадратичной формой поверхности называется форма

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u), \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad G = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v).$$

Матрица первой квадратичной формы:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением

$$z = z(x, y),$$

то

$$E = \frac{1 + z_x^2}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad F = \frac{z_x z_y}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad G = \frac{1 + z_y^2}{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

Пример 5. Найдем первую квадратичную форму эллиптического параболоида

$$2z = x^2 + y^2.$$

Имеем $z_x = x$, $z_y = y$, откуда

$$ds^2 = (1 + x^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 + y^2)dy^2. \quad \square$$

Угол α между кривыми

$$u = u_1(t), \quad v = v_1(t) \quad \text{и} \quad u = u_2(t), \quad v = v_2(t)$$

в точке M , в которой кривые пересекаются, вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F\dot{u}_1\dot{v}_2 + F\dot{v}_1\dot{u}_2 + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2} \sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}}.$$

Производные берутся в той же точке.

Площадь области D на поверхности вычисляется по формуле

$$S(D) = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

где D' – прообраз области D на плоскости (u, v) .

Второй квадратичной формой поверхности называется форма

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

где

$$L = \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением

$$z = z(x, y),$$

то

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Пример 6. Найдем вторую квадратичную форму эллиптического параболоида

$$2z = x^2 + y^2.$$

Имеем

$$z_x = x, \quad z_y = y, \quad z_{xx} = 1, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 1,$$

откуда получаем выражение для второй квадратичной формы:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}. \quad \square$$

Нормальным сечением поверхности в точке M называется линия пересечения поверхности с произвольной плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке M . Пусть ν – орт главной нормали некоторого нормального сечения в точке M . Кривизну такого сечения будем обозначать через k_n , считая, что $k_n > 0$, если $\nu = \mathbf{n}$ и $k_n < 0$, если $\nu = -\mathbf{n}$. Можно доказать, что либо существуют два взаимно ортогональных направления, в которых k_n принимает экстремальные значения:

$$k_1 = \min k_n, \quad k_2 = \max k_n,$$

либо кривизна всех нормальных сечений одинакова. В последнем случае точка M называется *омбилической*. Величины k_1 и k_2 называются *главными кривизнами* поверхности в точке M .

Если нормальное сечение образует угол φ с первым главным направлением, то для кривизны этого сечения имеет место *формула Эйлера*:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Произведение главных кривизн

$$K = k_1 k_2$$

называется *гауссовой кривизной* поверхности, их полусумма

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

– *средней кривизной*.

Имеют место формулы

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Если поверхность задана как график функции

$$z = z(x, y),$$

то

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{(1 + z_x^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_y^2)z_{yy}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}}. \quad (2.1)$$

Точка на поверхности называется *эллиптической*, если $K > 0$; *гиперболической*, если $K < 0$; *параболической*, если $K = 0, H \neq 0$; *точкой утолщения*, если $k = H = 0$. Омбилические точки характеризуются условием $K = H^2$. и подразделяются на точки утолщения и шаровые точки, в которых $K = H^2 > 0$. Поверхность называется *минимальной*, если во всех ее точках $H = 0$. Поверхность называется *развертывающейся*, если во всех ее точках $K = 0$.

Пример 7. Найдем гауссову кривизну эллиптического параболоида

$$2z = x^2 + y^2.$$

Имеем $z_x = x, z_y = y, z_{xx} = z_{yy} = 1, z_{xy} = 0$, откуда

$$K = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Так как $K > 0$, все точки этой поверхности – эллиптические. $\square$

Пример 8. Найдем среднюю кривизну поверхности

$$z = \ln \cos y - \ln \cos x.$$

Имеем

$$z_x = \operatorname{tg} x \quad z_y = -\operatorname{tg} x, \quad z_{xx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{1}{\cos^2 y}.$$

Подставляя в (2.1), получаем $H = 0$. Данная поверхность – минимальная. $\square$

Линия на поверхности называется *линией кривизны*, если в каждой своей точке она имеет главное направление. Линии кривизны определяются из дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dvdu & du^2 \\ E & G & G \\ L & N & N \end{vmatrix} = 0.$$

Оба семейства координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда $F = 0$ и $M = 0$.

Пусть (g_{ij}) – матрица первой квадратичной формы. Рассмотрим тогда матрицу (g^{ij}) , обратную к (g_{ij}) :

$$g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta_i^j.$$

Тогда *символы Кристоффеля* вычисляются по формулам

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2}g^{lj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right)$$

(формулы Кристоффеля).

Запишем те же формулы более подробно:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v; \end{cases}$$

Если поверхность задана как график функции

$$z = z(x, y),$$

то символы Кристоффеля вычисляются по формулам

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{z_x z_{xx}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{z_x z_{xy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, & \Gamma_{22}^1 = \frac{z_x z_{yy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{z_y z_{xx}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{z_y z_{xy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{z_y z_{yy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}. \end{cases}$$

Пример 9. Пусть поверхность представляет собой эллиптический параболоид (см. пример 5)

$$2z = x^2 + y^2.$$

Вычисляем производные:

$$z_x = x, \quad z_y = y, \quad z_{xx} = 1, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 1.$$

Значит,

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{y}{1 + x^2 + y^2},$$

а $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0$ □.

Имеет место *формула Гаусса*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right\}$$

и *формулы Петерсона–Кодацци*

$$(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) - (EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) - (EN - FM + GL)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0,$$

Геометрическая кривизна кривой $r = r(t)$ на поверхности вычисляется по формуле

$$k_g = \frac{1}{|\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', \mathbf{n}),$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности.

Пусть $r = r(u, v)$ и $u = u(t), v = v(t)$ – уравнения кривой в окрестности этой точки.

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2, \\ B &= \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2. \end{aligned}$$

Тогда для геометрической кривизны имеем формулу

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{3/2}}(\ddot{u}\dot{v} - \dot{u}\ddot{v} + A\dot{v} - B\dot{u}).$$

Кривая на поверхности называется *геометрической*, если в каждой ее точке геометрическая кривизна равна нулю. Уравнения геометрической

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

причем

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0, \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Имеют место следующие утверждения.

Для того, чтобы кривая была геометрической, необходимо и достаточно, чтобы ее главная нормаль в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадала с нормалью к поверхности.

Через каждую точку на поверхности в любом направлении можно провести геометрическую, причем ровно одну.

§ 3. Векторные и тензорные поля

См. [3].

§ 4. Тензор кривизны

Тензор типа $(3, 1)$ с координатами

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l$$

называется *тензором кривизны*.

Рассмотрим поверхность в $\mathbb{R}^3$. Всегда можно так выбрать систему координат, что в окрестности данной точки эта поверхность будет задана уравнением

$$z = z(x, y).$$

Для компонент тензора кривизны справедливы выражения

$$\begin{pmatrix} R_{211}^2 & R_{212}^2 \\ R_{121}^1 & R_{122}^1 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь K – гауссова кривизна. Всегда

$$\begin{pmatrix} R_{211}^2 & R_{212}^2 \\ R_{121}^1 & R_{122}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{121}^2 & -R_{122}^2 \\ -R_{211}^1 & -R_{212}^1 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Остальные координаты равны нулю. Кроме того,

$$R_{1122} = R_{2211} = K \det g, \quad R_{1212} = R_{2121} = -K \det g, \quad (4.2)$$

остальные $R_{lijk} = 0$. Здесь $\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Пример 8. Вычислим тензор кривизны эллиптического параболоида из примеров 5, 6 и 7. Вычисление по формулам (4.1) дает

$$\begin{pmatrix} R_{211}^2 & R_{212}^2 \\ R_{121}^1 & R_{122}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{121}^2 & -R_{122}^2 \\ -R_{211}^1 & -R_{212}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 + x^2 & xy \\ xy & 1 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, на основании (4.2) получаем

$$R_{1122} = R_{2211} = -R_{1212} = -R_{2121} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)}. \quad \square$$

Поверхность может быть задана параметрически. Выражения координат тензора кривизны через гауссову кривизну и коэффициенты первой квадратичной формы задаются теми же формулами (4.1).

Согласно общему правилу ковариантного дифференцирования тензоров (см. [1], [2], [3]), ковариантная производная тензора кривизны вычисляется по формуле

$$(\nabla_m R)_{ijk}^l = \frac{\partial R_{ijk}^l}{\partial x^m} + \Gamma_{m\alpha}^l R_{ijk}^\alpha - \Gamma_{mi}^\alpha R_{\alpha jk}^l - \Gamma_{mj}^\alpha R_{i\alpha k}^l - \Gamma_{mk}^\alpha R_{ij\alpha}^l.$$

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 1

Задача 1. Найдите эволюту кривой

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(4 \cos t + 3), \quad y = 5e^t \sin t, \quad z = e^t(3 \cos t - 4).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 + z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если все нормали к поверхности проходят через одну точку, то поверхность есть сфера или область на сфере.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 2

Задача 1. Найдите эволюту трактрисы

$$x = -a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 3 \operatorname{ch} t + 4t, \quad y = 5 \operatorname{sh} t, \quad z = 4 \operatorname{ch} t - 3t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 + 6z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если все нормали к поверхности проходят через одну прямую, то поверхность есть поверхность вращения или область на такой поверхности.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 3

Задача 1. Найдите эволюту циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(3 \cos t - 4), \quad y = 5e^t \sin t, \quad z = e^t(4 \cos t + 3).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 48z = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что поверхность с первой квадратичной формой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

имеет постоянную гауссову кривизну.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 4

Задача 1. Найдите эволюту гипоциклоиды

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

Задача 2. На кривой

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = \sin t$$

найдите кривизну и кручение в произвольной точке, а также репер Френе при $t = 0$.

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите теорему Клеро о геодезических на поверхностях вращения: *произведение радиуса на синус угла, образуемого геодезической с меридианом, есть величина постоянная,*

$$r \sin \alpha = \text{const.}$$

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 5

Задача 1. Найдите эволюту логарифмической спирали

$$r = e^{\varphi}.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 13e^t \cos t, \quad y = e^t(5 \sin t + 12), \quad z = e^t(12 \sin t - 5).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4.* Докажите, что геодезические на поверхностях с первой квадратичной формой

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2)$$

(эти поверхности называются поверхностями Лиувилля) находятся в квадратурах.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

Задача 5. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 6

Задача 1. Найдите эволюту кривой

$$x = a[2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t], \quad y = a[2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t].$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 13 \operatorname{ch} t, \quad y = 5 \operatorname{sh} t - 12t, \quad z = 12 \operatorname{sh} t + 5t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 5. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 6*. Постройте три линейно независимых векторных поля на трехмерной сфере S^3 .

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 7

Задача 1. Найдите эволюту циссоиды

$$y^2(2a - x) = x^3.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 5e^t \cos t, \quad y = e^t(4 \sin t + 3), \quad z = e^t(3 \sin t - 4).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - z^2 + 24 = 0.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Сеть линий на поверхности называется *сетью Чебышева*, если в каждом образованном ею криволинейном четырехугольнике противоположные стороны имеют одинаковые длины. Например, нити куска ткани, натянутого на поверхность, образуют на ней чебышевскую сеть.

Доказать, что если в сети Чебышева на поверхности S одно семейство нитей состоит из геодезических, то поверхность S – развертывающаяся.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 8

Задача 1. Найдите эволюту астроида

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 5 \operatorname{ch} t + 12t, \quad y = 13 \operatorname{sh} t, \quad z = 12 \operatorname{ch} t - 5t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6z^2 + 24 = 0.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 5. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 6*. Постройте семь линейно независимых векторных полей на семимерной сфере S^7 .

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 5 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 9

Задача 1. Найдите эволюту кривой

$$x = 2 \cos t + (2t + 3) \sin t, \quad y = 2 \sin t - (2t + 3) \cos t.$$

Задача 2. На кривой

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2 \quad (t > 0)$$

найдите кривизну и кручение в произвольной точке, а также репер Френе при $t = 0$.

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4z^2 + 24 = 0.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если минимальная поверхность является поверхностью вращения, то она либо плоскость, либо катеноид.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 10

Задача 1. Найдите эволюту эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 5 \operatorname{ch} t + 12 \operatorname{sh} t, \quad y = 13t, \quad z = 12 \operatorname{ch} t - 5 \operatorname{sh} t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если все точки поверхности – омбилические, то поверхность есть область на сфере или на плоскости.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 11

Задача 4. Найдите эволюту гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(4 \cos t + 3), \quad y = 5e^t \sin t, \quad z = e^t(3 \cos t - 4).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите теорему Бельтрами–Эннепера: *если асимптотические линии различных семейств имеют в их общей точке отличные от нуля кривизны, то они имеют равные по величине, но противоположные по знаку кручения; абсолютная величина кручения равна абсолютному значению гауссовой кривизны поверхности в данной точке.*

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

ВАРИАНТ 12

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных координатах

$$r = \sqrt{2} + \cos \varphi + \sin \varphi.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 3\operatorname{ch} t + 4\operatorname{sh} t, \quad y = 5t, \quad z = \operatorname{ch} t - 3\operatorname{sh} t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 3z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. 1) Пусть на гладкой поверхности в двух точках прижимается и натягивается нерастяжимая нить. В результате нить займет положение на поверхности вдоль некоторой кривой. Докажите, что эта кривая – геодезическая.

2) Пусть по гладкой поверхности без трения передвигается материальная точка. В начальный момент времени точка имеет некоторую скорость и продолжает движение по инерции. Никакие внешние силы на точку не действуют (можно это представлять себе как движение маленького магнита по гладкой железной поверхности). Докажите, линия движения точки – геодезическая.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

ВАРИАНТ 13

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных координатах

$$r = \sqrt{2} + \cos \varphi + \sin \varphi.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(5 \cos t - 12t), \quad y = 13e^t \sin t, \quad z = e^t(12 \cos t + 5t).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 2z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Метрика пространства-времени в окрестности точечной массы имеет вид

$$ds^2 = \frac{\rho - 1}{\rho} dt^2 - \frac{\rho}{\rho - 1} d\rho^2 - \rho^2(d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi^2).$$

Составить уравнение пространственно-временной траектории (геодезической с $ds^2 > 0$), лежащей в плоскости $\psi = 0$; решить его для случая круговой орбиты ($\rho = \text{const}$). При каких ρ круговая орбита возможна? Каков период обращения (по времени t и по собственному времени s спутника)?

За единицу длины взят гравитационный радиус; единица времени выбрана так, чтобы скорость света $c = 1$.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 14

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных координатах

$$r = a(1 + \sin \varphi).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 7 \operatorname{ch} t + 24 \operatorname{sh} t, \quad y = 25t, \quad z = 24 \operatorname{ch} t - 7 \operatorname{sh} t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 3z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Вычислите гауссову кривизну поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2.$$

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

КУРСОВАЯ РАБОТА
по курсу
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА
ВАРИАНТ 15

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных координатах

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(4 \cos t + 3 \sin t), \quad y = 5e^t, \quad z = e^t(3 \cos t - 4 \sin t).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 24z = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

то гауссова кривизна поверхности

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda.$$

где Δ – оператор Лапласа.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

ВАРИАНТ 16

Задача 1. Найдите эволюту гиперболы

$$xy = a^2.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 7\operatorname{ch} t + 24t, \quad y = 25\operatorname{sh} t, \quad z = 24\operatorname{ch} t - 7t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если координатная сеть на поверхности состоит из линий кривизны, то уравнения Петерсона–Кодацци принимают вид

$$L_v = HE_v, \quad N_u = HG_u,$$

где H – средняя кривизна поверхности.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X . Определите координаты тензоров S и R , полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T . Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R_{ijk}^l и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X .

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.
- [2] Ю. И. Димитриенко, *Тензорное исчисление*, Высшая школа, М., 2001.
- [3] А. Н. Щетинин, Е. А. Губарева, *Основы тензорного анализа*, Изд-во МГТУ, М., 2012.
- [4] А. В. Погорелов, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Изд-во Харьковского ун-та., Харьков, 1961.
- [5] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.
- [6] Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин, *Сборник задач по высшей математике. ТТ. 1, 2*, Физматлит, М., 1958.
- [7] Э. Р. Розендорн, *Задачи по дифференциальной геометрии*, Изд-во МГУ, М., 1969.