Делимость

Задача 0. Точка B лежит на отрезке AC, причем $AB = 2$ см, $BC = 1$ см. На прямой AB укажите все такие точки M, для которых $AM + BM = CM$.

Задача 1. В следующих высказываниях найдите верные, а если утверждение не верно, приведите контрпример.

а) Если число делится на 5 и на 2, то оно делится на 10.
б) Если число делится на 10, то оно делится на 5 и на 2
в) Если число делится на 54, то оно делится на 6 и на 9.
г) Если число делится на 6 и на 9, то оно делится на 54.

Задача 2. а) Докажите, что для любых натуральных x и y число $x * y * (x + y)$ чётное.
б) Докажите, что для любого натурального x число $x^3 + 47x$ делится на 3.
в) Докажите, что произведение 8 последовательных чисел делится на 35.

Задача 3. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Задача 4. На новом супер-калькуляторе есть только три кнопки: «умножить на 7», «прибавить 27» и «вычесть 12». Можно ли на этом калькуляторе из числа 6 получить число 1? Какие числа можно получить из числа 6?

Делимость

Задача 5. Лодочник берет плату за переправу с одного берега на другой 30 рублей. Причем, каждую его переправу через реку, кого-то он везет. В конце дня он выяснил, что заработал 47150 рублей. Докажите, что где-то он ошибся.

Задача 6. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов, на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

Задача 7. Повар Марина испекла пирожки на кружок и хочет разделить их между всеми поровну. На кружок пришло 17 человек и у Марины остался лишний пирожок. Тогда она решила выдать пирожков еще и Грише, но снова остался пирожок. Тогда она съела этот пирожок, но выяснилось, что Сережа тоже хочет пирожков. Но теперь ей удалось разделить пирожки между всеми учениками, Гришей и Сережей. Какое минимальное число пирожков испекла Марина?

Задача 8. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $n+1, n+2, ..., n+2016$ – составные.

Задача 9. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.