IX ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Задания

I. Эссе

1. Дефицит бумаги. Однажды в одном крупном городе управление образования обратилось к математикам с просьбой рассчитать, сколько нужно иметь запасных бланков ЕГЭ, чтобы хватило всем выпускникам города. Математики сделали расчёт и сказали, что нужно иметь 10 тысяч запасных бланков, и тогда всем выпускникам хватит почти наверняка (с вероятностью не менее 0,99). Управление поблагодарило математиков, заготовило 10 тысяч запасных бланков и разделило их поровну между всеми пятью городскими пунктами проведения экзамена, поскольку на каждом пункте ожидалось примерно поровну выпускников. Велико же было удивление начальника управления, когда на трёх пунктах бумаги не хватило, а на двух – бумага осталась, и немало. Сначала даже решили, что математики ошиблись в расчётах, однако вскоре стало ясно, что математики всё сделали верно – после того, как бумагу оттуда, где она осталась, перевезли туда, где ее не хватило, остался некоторый запас. В чем же была ошибка, и как нужно было действовать, чтобы не попасть в такую неприятную ситуацию?

2. Кубик в форме шара. Занятная вариация обычного шестигранного кубика, который на самом деле шарик, или шарика, который на самом деле – кубик (см. рисунок). Шарик свободно катается, но, остановившись, всегда встаёт точно одной из шести нарисованных «граней» кверху. При этом все шесть фиксированных положений равновероятны (вероятность любого другого промежуточного положения нулевая). Представьте, что вам дано задание изготовить такой круглый кубик. Как бы вы подошли к делу? Придумайте и подробно опишите хотя бы один способ изготовить такое невозможное чудо.

3. Закон Ципфа. (Zipf's law[1]). Существует множество видов данных, которые подчиняются удивительной закономерности – закону Ципфа. Возьмем, к примеру, население городов некоторой страны. При некоторых естественных условиях формирования городов численность их населения приходит к состоянию, когда население крупнейшего города примерно вдвое больше, чем население второго по численности, в три раза больше, чем население третьего и т.д.

Закон Ципфа встречается в лингвистике: в естественном языке (русский, английский и т.п.) самое распространенное слово встречается примерно вдвое чаще, чем второе по частоте, втрое чаще, чем третье по частоте и т.п.

[1] Закон носит имя американского лингвиста Джорджа Кингсли Ципфа, хотя впервые был описан задолго до Ципфа французским стенографистом Жаном-Батистом Эсту в работе «Диапазон стенографии» в 1908 году. Обоснования закона Ципфа появились недавно, уже в XXI веке, но до сих пор неясно, опирается ли закон Ципфа больше на природу величин, которые ему подчиняются, или на свойства случайных последовательностей.

Математически закон можно описать так: пусть дан набор количественных характеристик некоторого множества (население городов, частота слов, доходы людей и т.п.). Упорядочим числа от наибольшего к наименьшему:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_k > \ldots > A_n.$$

Номер числа в этой последовательности называют рангом. Закон Ципфа выполняется для этих данных, если $A_1 \approx kA_k$. Графически это означает, что точки с координатами $(k; A_k)$ лежат вблизи гиперболы $y = \frac{A_1}{x}$.

В качестве примера мы взяли численность населения шести крупнейших городов США: Нью-Йорка (ранг 1), Лос-Анджелеса (2), Чикаго (3), Хьюстона (4), Филадельфии (5) и Финикса (6). На диаграмме (рис. 1) показана численность этих городов по рангам (точки). Линия – гипербола $y = \frac{A_1}{x}$, где $A_1 = 8405837$ – численность Нью-Йорка, а x – ранг города от 1 до 6. Для этой совокупности закон Ципфа, похоже, выполняется.

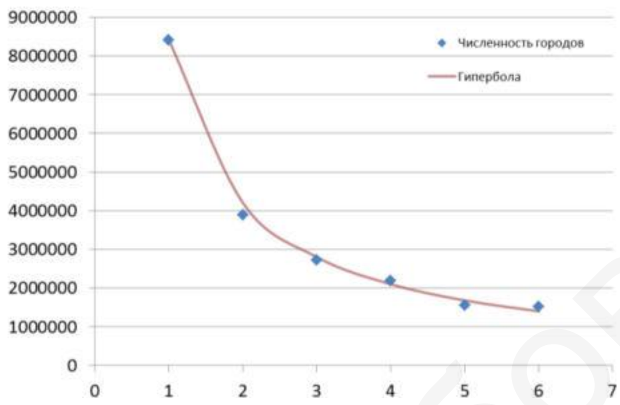


Рис. 1

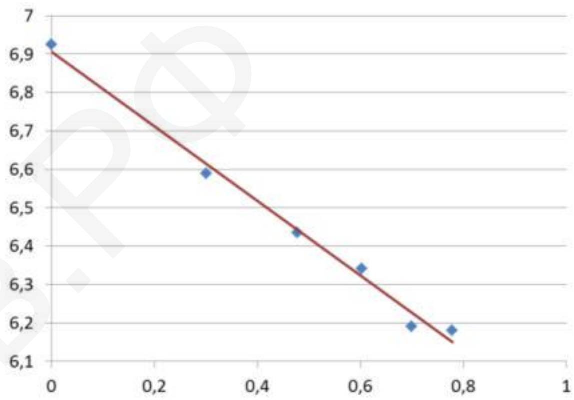


Рис. 2

Тот, кто знаком с логарифмами, может получить еще более удобную картинку, прологарифмировав обе величины: $\lg y = \lg A_1 - \lg x$. Переходя к новым переменным $z = \lg y$ и $u = \lg x$, мы получаем точки вблизи прямой $z = \lg A_1 - u$. Такая интерпретация удобна, потому что человеческий глаз чутко реагирует на отклонение от прямой. Легко устроить «глазомерную» проверку закона Ципфа: если для некоторых данных окажется, что точки $(\lg k; \lg A_k)$ расположены вблизи прямой, можно предположить, что эти данные подчиняются закону Ципфа. На рис.2 пример про города США показан в логарифмическом виде (по оси абсцисс десятичный логарифм ранга, по оси ординат – десятичный логарифм численности населения).

Интересно, выполняется ли закон Ципфа для городов России? Для городов мира? Для объема воды в крупнейших озерах? Для высот высочайших гор мира? Для числа пассажиров городских метрополитенов? Нужные данные можно найти в интернете. Например, некоторые полезные таблицы размещены на странице

http://ptlab.mccme.ru/node/350 .

Может быть, вам удастся найти какой-нибудь другой вид данных, который подчиняется закону Ципфа? У вас есть шанс стать первооткрывателем.

II. Задачи

1. Отопительный сезон. Городской муниципалитет Затонска принял правило: отопление в домах следует включать не раньше 26 октября, но только если средняя температура в течение трех предыдущих дней ниже $8°C$. В городе два района – Прибрежный и Заречный.

В Прибрежном районе правило поняли так: если три дня подряд средняя дневная температура каждый день ниже $8°C$, то на четвёртый день нужно включить отопление, если этот день случился 26 октября или позже.

В Заречном районе правило поняли иначе: если средняя температура за трёхдневный период ниже $8°C$, то на четвёртый день нужно включить отопление, если этот день не раньше 26 октября.

В таблице показана средняя дневная температура за несколько дней октября.

Дата	22 окт	23 окт	24 окт	25 окт	26 окт	27 окт	28 окт	29 окт	30 окт
Ср. темп. °C	3	9	10	6	3	7	10	6	8

а) **(от 6 класса. 1 балл).** Какого числа отопление включили в Прибрежном районе? Какого числа отопление включили в Заречном районе?

б) **(от 6 класса. 1 балл).** Докажите, что какие бы ни случились дни в октябре, в Заречном районе отопление включат не позже, чем в Прибрежном.

2. Отметка за полугодие. К концу полугодия у Василия Петрова в журнале стояли такие отметки по математике:

4, 1, 2, 5, 2

Перед тем как выставить полугодовую отметку, учитель математики сказал Васе:

– Вася, ты можешь выбрать метод, как вывести твою отметку за полугодие. Предлагаю два варианта. Метод А: среднее арифметическое текущих отметок с округлением до целого. Метод Б: медиана текущих отметок.

Лучший метод для Васи – это такой метод, который даст Васе в полугодии наибольшую отметку.

а) (от 6 класса. 1 балл). Какой метод для Васи лучший?

б) (от 6 класса. 2 балла). Потом учитель подумал и добавил:

– Имей в виду, Василий, что если ты сумеешь выбрать лучший для себя метод, то я поставлю тебе в журнал еще две пятерки, а уже потом выведу отметку за полугодие.

Докажите, что в этих условиях метод А не является для Васи лучшим.

3. Переводчик (от 6 класса. 1 балл). Василий Петров выполняет задание по английскому языку. В этом задании есть 10 английских выражений и их переводы на русский в случайном порядке. Нужно установить верные соответствия между выражениями и их переводами. За каждое правильно установленное соответствие даётся 1 балл. Таким образом, можно получить от 0 до 10 баллов. Вася ничего не знает, поэтому выбирает варианты наугад. Найдите вероятность того, что он получит ровно 9 баллов.

4. Бракованные монеты (от 6 класса. 1 балл). К юбилею Санкт-Петербургских математических олимпиад монетный двор отчеканил три юбилейные монеты. Одна монета получилась правильно, у второй монеты на обеих сторонах оказалось два орла, а у третьей обе стороны – решки. Директор монетного двора не глядя выбрал одну из этих трёх монет и бросил её наудачу. Выпал орёл. Чему равна вероятность того, что на второй стороне этой монеты тоже орёл?

5. Пересекающиеся диагонали (от 7 класса. 2 балла). В выпуклом шестиугольнике независимо друг от друга выбраны две случайные диагонали. Найдите вероятность того, что эти диагонали пересекаются внутри шестиугольника (внутри – то есть не в вершине).

6. Три мишени. Стрелок стреляет по трём мишеням до тех пор, пока не собьёт все. Вероятность попадания при одном выстреле равна p.

а) (от 7 класса. 2 балла). Найдите вероятность того, что потребуется ровно 5 выстрелов.
б) (от 8 класса. 2 балла). Найдите математическое ожидание числа выстрелов.

7. **Паросочетания (от 8 класса. 2 балла)**. На соревнования приехали 10 теннисисток, из них 4 из России. По правилам для проведения первого тура теннисистки разбиваются на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что в первом туре все россиянки будут играть только с россиянками.

8. (от 9 класса. 2 балла). В треугольнике ABC угол A равен 40°. Треугольник случайным образом бросают на стол. Найдите вероятность того, что вершина A окажется восточнее двух других вершин.

9. Стальные двери (от 9 класса. 2 балла). На заводе имени матроса Железняка изготавливают прямоугольники длиной 2 м и шириной 1 м. Длину отмеряет рабочий Иванов, а ширину, независимо от Иванова, отмеряет рабочий Петров. Средняя ошибка у обоих нулевая, но Иванов допускает стандартную ошибку измерения (стандартное отклонение длины) 3 мм, а Петров допускает стандартную ошибку 2 мм.
а) (от 9 класса. 1 балл). Найдите математическое ожидание площади получившегося прямоугольника.
б) (от 9 класса. 2 балла). Найдите стандартное отклонение площади получившегося прямоугольника в квадратных сантиметрах.

10. Диски (от 9 класса. 3 балла). На знакомом нам заводе вырезают металлические диски диаметром 1 м. Известно, что диск диаметром ровно 1 м весит ровно 100 кг. При изготовлении возникает ошибка измерения, и поэтому стандартное отклонение радиуса составляет 10 мм. Инженер Сидоров считает, что стопка из 100 дисков в среднем будет весить 10000 кг. На сколько ошибается инженер Сидоров?

11. Пересекающиеся диагонали 2 (от 9 класса. 3 балла). В выпуклом многоугольнике, в котором нечетное число вершин, равное $2n+1$, выбирают независимо друг от друга две случайные диагонали. Найдите вероятность того, что эти диагонали пересекаются внутри многоугольника.

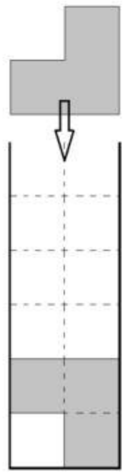
12. Сногсшибательная новость. На конференцию приехали 18 ученых, из которых ровно 10 знают сногсшибательную новость. Во время перерыва (кофе-брейка) все ученые разбиваются на случайные пары, и в каждой паре каждый, кто знает новость, рассказывает эту новость другому, если тот её ещё не знал.

а) (от 6 класса. 1 балл). Найдите вероятность того, что после кофе-брейка число ученых, знающих новость, будет равно 13.

б) **(от 10 класса. 4 балла).** Найдите вероятность того, что после кофе-брейка число, ученых, знающих новость, будет равно 14.

в) **(от 9 класса. 3 балла).** Обозначим буквой X количество ученых, которые знают сногсшибательную новость после кофе-брейка. Найдите математическое ожидание X .

13. Маленький тетрис. Высокий прямоугольник ширины 2 открыт сверху, и в него падают в случайной ориентации Г-тримино (см. рисунок).



а) (от 9 класса. 3 балла). Упало k тримино. Найдите математическое ожидание высоты получившегося многоугольника.

б) (от 10 класса. 6 баллов). Упало 7 тримино. Найдите вероятность того, что сложенная из тримино фигура будет иметь высоту 12.

14. Запутанное дело (от 10 класса. 4 балла). Расследуя одно дело, следователь Башковицкий обнаружил, что ключевой свидетель – тот из семьи Петровых, кто в тот роковой день пришёл домой прежде прочих. Расследование выявило следующие факты.

1. Соседка Марья Кузьминична хотела одолжить у Петровых соли, звонила им в дверь, но никто не открыл. Во сколько? Да кто ж знает? Темно уж было…

2. Галина Ефимовна Петрова, придя вечером домой, обнаружила обоих детей на кухне, а мужа на диване – у него болела голова.

3. Муж Анатолий Иванович заявил, что как пришёл, сразу лёг на диван и задремал, никого не видел, ничего не слышал, соседка точно не приходила – звонок бы его разбудил.

4. Дочь Светлана сказала, что, вернувшись домой, сразу ушла к себе в комнату, про отца ничего не знает, но в прихожей, как всегда, споткнулась о Димкин ботинок.

5. Дмитрий когда пришёл – не помнит, отца не видел, а как Светка ругалась из-за ботинка – слышал.

– Ага, – задумался Башковицкий. – Какова же вероятность того, что Дмитрий вернулся домой раньше отца?

15. Английский клуб (от 9 класса. 6 баллов). Каждую пятницу десять джентльменов приходят в клуб, и каждый отдает швейцару свою шляпу. Каждая шляпа точно впору своему хозяину, но двух одинаковых по размеру шляп нет. Уходят джентльмены по одному в случайном порядке.

Провожая очередного джентльмена, швейцар клуба пробует надеть ему на голову первую попавшуюся шляпу. Если налезает, джентльмен уходит в этой шляпе. Если мала, то швейцар пробует следующую случайную шляпу из оставшихся. Если все оставшиеся шляпы оказались малы, швейцар говорит бедняге: «Сэр, сегодня шляпа вам не к лицу», и джентльмен отправляется домой с непокрытой головой. Найдите вероятность того, что в следующую пятницу у швейцара не останется ни одной шляпы.

16. Ничьи (от 9 класса. 6 баллов). Две хоккейные команды одинаковой силы договорились, что будут играть до тех пор, пока суммарный счёт не достигнет 10. Найдите математическое ожидание числа моментов, когда наступала ничья.