Занятия 9 и 10 (1 марта)

I. Характеристики дискретных распределений

1. Случайная величина X имеет математическое ожидание и дисперсию и задана бесконечным распределением

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Пусть $f_X(z) = \mathrm{E}\, e^{Xz} = \sum\limits_k p_k e^{kz}$ — производящая функция моментов.

а) Покажите, что $\mathrm{E}\, X = f'(0)$.

б) Покажите, что $\mathrm{D}\, X = f''(0) - \mathrm{E}^2 X$.

2. Случайная величина X имеет математическое ожидание $\mathrm{E}\, X$ и дисперсию $\mathrm{D}\, X$ и представляется в виде суммы *зависимых* бинарных величин I_k:

$$X = \sum_k I_k$$

Докажите: $\mathrm{D}\, X = \mathrm{E}\, X + 2\sum\limits_{k<m} \mathrm{E}\left(I_k I_m\right) - \mathrm{E}^2 X$.

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей геометрическое распределение $G(p)$.

Указание. Удобно воспользоваться производящей функцией моментов. Если пользоваться индикаторами, удобно рассмотреть индикаторы событий «k-е испытание окончилось неудачей» (в интерпретации X как числа испытаний до первого успеха»).

4. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей биномиальное распределение $Bi(n, p)$.

Указание. Удобно воспользоваться производящей функцией или индикаторами, которые оказываются независимы.

5. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение $HG(N, K, n)$ (N – объем совокупности, K — число помеченных объектов совокупности, n — объем выборки).

Указание. Удобно воспользоваться индикаторами, как в задаче 4, но они в этом случае зависимы.

II. Непрерывные случайные величины

6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 2, \\ (x-2)^2, \text{если } 2 \le x < 3, \\ 1, \text{если } x \ge 3. \end{cases}$$

а) Найдите вероятность события $\xi \le 2{,}5$.

б) Найдите вероятность события $2{,}1 < \xi \le 2{,}6$.

в) Является ли случайная величина ξ абсолютно непрерывной? Если да, напишите функцию плотности для этой случайной величины.

7. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<2,\\ (x-2)^2, \text{если } 2\le x<3,\\ 1, \text{если } x\ge 3.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание величины ξ.

8. Распределение случайной величины ξ задано плотностью:

$$p(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

а) Найдите функцию распределения F_{ξ}.

б) Найдите вероятность события $0\le\xi\le\ln 3$.

III. Равномерное, показательное и нормальное распределение

9. Билли Бонс просит подаяние. В конце каждого рабочего дня он отправляется в банк и меняет полученную мелочь на купюры по 10 тысяч, 5 тысяч и по тысяче пиастров, на сколько хватает выручки. Оставшиеся пиастры Бонс ссыпает в бочку в подвале своего гаража. Оцените сумму, на которую выросла «капитализация» бочки за 10 рабочих дней.

а) Сделайте точечную оценку с помощью математического ожидания;

б) Сделайте интервальную оценку с помощью интервала шириной три стандартных отклонения и с серединой в математическом ожидании.

10. Предположим, что срок службы светодиодной лампы имеет показательное распределение с параметром «средний срок службы» $\theta=20000$ часов. Оцените долю лампочек, которые не испортятся до этого срока.

11. Найдите медиану случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром θ. Сравните найденную медиану с математическим ожиданием.

12. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N\left(\mu;\sigma^2\right)$. Найдите вероятность события:

а) $\mu<X<\mu+\sigma$; б) $\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$; в) $\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma$; г) $\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma$.

13. Хорошо известно, что рост взрослого ирландского эльфа[1] подчиняется нормальному распределению со средним 101 см и со стандартным отклонением 5 см. Найдите вероятность того, что первый встреченный взрослый ирландский эльф имеет рост 95 — 98 см.

14. Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(0;1)$. Найдите ширину симметричного интервала $(-a;a)$, в который эта величина попадает с заранее заданной вероятностью 0,98:

$$\mathrm{P}(X\in(-a;a))=0{,}98.$$

Результат округлите до тысячных.

[1] https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%81_%D0%A4%D0%B0%D1%83%D0%BB_(%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2)

Замечание. Для расчетов, связанных с нормальным распределением, удобно пользоваться функциями Excel

$$=\text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;0)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{и} \quad =\text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;1)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt,$$

их обобщениями на нормальное распределение с параметрами μ и σ^2:

$$=\text{НОРМ.РАСП}(x;\mu;\sigma;\mathit{flag}),$$

обратной функцией для стандартного распределения

$$=\text{НОРМ.СТ.ОБР}(x)=a, \text{ где } \int_{-\infty}^{a}\varphi(t)\,dt=x$$

или ее обобщением $=\text{НОРМ.ОБР}(x;\mu;\sigma)$.

Ответы

3. $\mathrm{E}\,X=\frac{1}{p}, \mathrm{D}\,X=\frac{q}{p^2}$. **4.** $\mathrm{E}\,X=np$, $\mathrm{D}\,X=npq$. **5.** $\mathrm{E}\,X=n\frac{K}{N}$, $\mathrm{D}\,X=n\frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

6. а) 0,25; б) 0,35; в) да $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<2,\\ 2x-4, \text{если } 2\le x<3,\\ 0, \text{если } x\ge 3.\end{cases}$. **7.** $8/3$. **8.** а) $F_\xi=\frac{e^x}{e^x+1}$; б) 0,25.

9. а) 5000 пиастров; б) от $5000-500\sqrt{3}$ до $5000+500\sqrt{3}$, то есть примерно 4134 — 5866 пиастров. **10.** Около 37%. **11.** $\theta\ln 2<\theta$. **12.** а) 0,341; б) 0,683; в) 0,955; г) 0,997. **13.** 0,1596. **14.** 4,653.