Занятия 7 и 8 (15 февраля)

I. Дискретная случайная величина

1. Найдите неизвестную вероятность p в распределении случайной величины X :

$$\text{а) } X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & p \end{pmatrix};\ \text{б) } X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0,1 & 0,4 & p & 0,2 \end{pmatrix}.$$

2. Напишите *распределение Бернулли* индикатора события A :

а) событие A «при бросании игральной кости выпало больше двух очков»;
б) событие A «стрелок промахнулся четыре раза» в опыте, где стрелок стреляет по мишени до первого попадания с вероятностью p попадания при каждом выстреле.

в) событие A «четвертое испытание окончилось успехом» в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха в каждом испытании p .

3. Из ящика, в котором 8 белых и 6 черных шаров по одному в случайном порядке вытаскивают шары. Напишите распределение индикатора события «пятый по счету шар оказался черным».

4. Случайная величина X задана распределением:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,8 & 1 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Напишите распределение случайной величины:

$$\text{а) } 5X-3;\ \text{б) } X^2.$$

5. Докажите, что $I^2 = I$, где I — произвольная бинарная случайная величина.

6. Две случайные величины X и Y заданы распределениями:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix},\ Y \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

а) Какие значения может принимать случайная величина $X+Y$? Можно ли найти какие-то из вероятностей этих значений?

б) Напишите распределение случайной величины $X+Y$, считая, что X и Y независимы.

7. Производится серия испытаний до первого успеха с вероятностью успеха p в каждом отдельном испытании. Напишите *геометрическое распределение* случайной величины X «число произведенных испытаний».

8. Канцелярскую кнопку бросают 10 раз. Вероятность выпадения ее шляпкой вниз равна $0,45$. Напишите распределение случайной величины «число испытаний, когда кнопка упала острием вниз».

9. Производится серия из n одинаковых и независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом. Напишите *биномиальное распределение* случайной величины «число успехов».

10. В коробке 8 красных и 9 синих елочных шаров. Из коробки наудачу вынимают 5 шаров. Напишите распределение случайной величины «число красных шаров среди вынутых».

11. Запишите в общем виде распределение гипергеометрического распределения с параметрами N — размер совокупности, n – число выбранных объектов, K – число меченых объектов в совокупности.

12. В некотором опыте рассмотрим два события A и B и их индикаторы I_A и I_B. Напишите индикатор события:

а) $\overline{B}$; б) $A \cap B$; в) $\overline{A} \cap B$; г) $\overline{A \cap B}$

13. В некотором опыте рассмотрим два события A и B и их индикаторы I_A и I_B.
а) Запишите индикатор события $A \cup B$;

б) Используя п. а), выведите формулу сложения: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

14. Выведите формулу сложения вероятностей для а) 3 событий; б) n событий:

II. Математическое ожидание

15. Найдите *математическое ожидание распределения Бернулли*, то есть бинарной случайной величины — индикатора события A, имеющего вероятность p.

16. Дана случайная величина X. Найдите $\mathrm{E}\,X$:

$$\text{а) } X \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \text{ б) } X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

17. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков, если игральную кость бросают

а) два раза; б) три раза; в) n раз.

18. В аэропорту пассажиры ожидают около ленты транспортера свои 200 чемоданов. Среди них семья Петровых, которые ждут свои четыре чемодана. Чемоданы начинают появляться на ленте в случайном порядке. Найдите математическое ожидание номера

а) первого из петровских чемоданов; б) последнего петровского чемодана.

19. В условиях предыдущей задачи найдите математическое ожидание числа чемоданов семьи Петровых, которые появились в первой сотне.

20. В учительской на стене доска, на ней N крючков, на каждом висит ключ от кабинета. Однажды вечером доска сорвалась, все ключи рассыпались, охранник прибил доску на место, а ключи развесил на крючки – на каждый крючок по ключу, но в случайном порядке. Найдите математическое ожидание числа ключей, которые оказались на своих крючках.

III. Дисперсия

21. Найдите *дисперсию распределения Бернулли* – дисперсию индикатора I события, имеющего вероятность p.

22. Найдите наибольшее значение дисперсии распределения Бернулли. При какой вероятности успеха p дисперсия будет наибольшей?

23. Найдите дисперсию числа очков, выпавших

а) на одной игральной кости; б) на двух костях.

24. Найдите дисперсию случайной величины «число ключей на своих крючках» из задачи 25.

25. Найдите дисперсию случайной величины «номер первого чемодана семьи Петровых» из задачи 18.

Ответы

1. а) $0,7$; б) $0,3$. **2.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-(1-p)^4 & (1-p)^4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}$. **4.** а) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0,04 & 0,16 & 0,64 & 1 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

6. а) $-2,-1,0,1,2,3$; нельзя; б) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,07 & 0,17 & 0,06 & 0,21 & 0,37 & 0,12 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p & qp & q^2p & \ldots & q^{k-1}p & \ldots \end{pmatrix}$, где $q=1-p$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & 10 \\ 0,45^{10} & 10\cdot 0,45^2\cdot 0,55 & \ldots & C_{10}^k 0,45^k 0,55^{10-k} & \ldots & 0,55^{10} \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots & p^n \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \dfrac{C_9^5}{C_{17}^5} & \dfrac{C_8^1 C_9^4}{C_{17}^5} & \dfrac{C_8^2 C_9^3}{C_{17}^5} & \dfrac{C_8^3 C_9^2}{C_{17}^5} & \dfrac{C_8^4 C_9^1}{C_{17}^5} & \dfrac{C_8^5}{C_{17}^5} \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} m & m+1 & \ldots & k & \ldots & M \\ \dfrac{C_K^m C_{N-K}^{n-m}}{C_N^n} & \dfrac{C_K^{m+1} C_{N-K}^{n-m-1}}{C_N^n} & \ldots & \dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} & \ldots & \dfrac{C_K^M C_K^n}{C_N^n} \end{pmatrix}$, где $m=\max(0; K+n-N)$, $M=\min(n,K)$.

12. а) $1-I_B$; б) $I_A I_B$; в) $(1-I_A)I_B$; г) $1-I_A I_B$. **13.** а) $I_A+I_B-I_A I_B$.

14. а) $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$; б) $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sigma_{n,1}-\sigma_{n,2}+\sigma_{n,3}-\ldots(-1)^{n-1}\sigma_{n,n}$, где $\sigma_{n,k}$ — основной симметрический полином степени k от n индикаторов.

15. $\mathrm{E}I_A=p$. **16.** а) 1,6; б) 0. **17.** а) 7; б) 10,5; в) $3,5n$. **18.** а) $40,2$; б) 160,8. **19.** 2. **20.** 1. **21.** pq, где $q=1-p$. **22.** $0,25$ при $p=0,5$. **23.** а) $35/12$; б) $35/6$. **24.** 1. **25.** 1050,56; прб. 32,41.