Радикальная ось

▷ *Напоминание.* Дана окружность ω радиуса r. На расстоянии d от её центра отмечена точка M. Величина $d^2 - r^2$ называется *степенью точки M относительно окружности ω.*

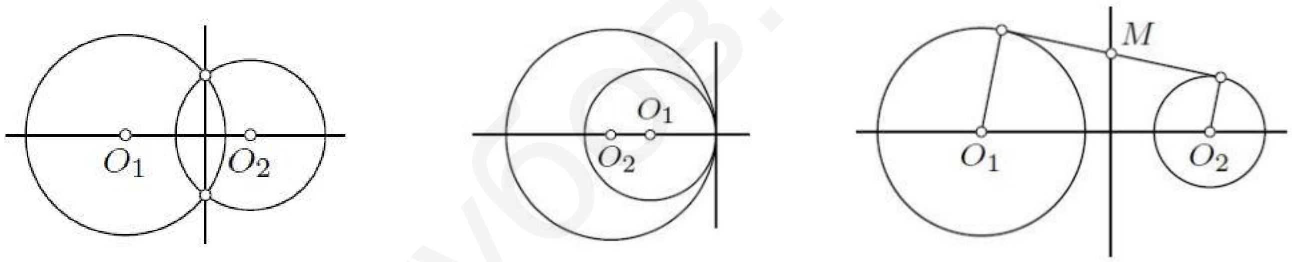
▷ *Радикальная ось* двух окружностей — множество точек плоскости, каждая их которых имеет одинаковые степени относительно этих окружностей.

▷ **Теорема.** *Даны окружности ω_1 и ω_2, центры которых не совпадают. Тогда для этих окружностей радикальная ось существует и является прямой линией, перпендикулярной линии центров.*

1. Если две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух различных точках, то радикальная осью этих окружностей является прямая проходящая через точки их пересечения.

2. Если две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним или внутренним образом, то их радикальная ось совпадает с общей касательной в точке касания окружностей.

3. Если две окружности ω_1 и ω_2 лежат одна вне другой, не касаясь, то радикальная ось содержит середины общих касательных этих окружностей.



Задача 1. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C – прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

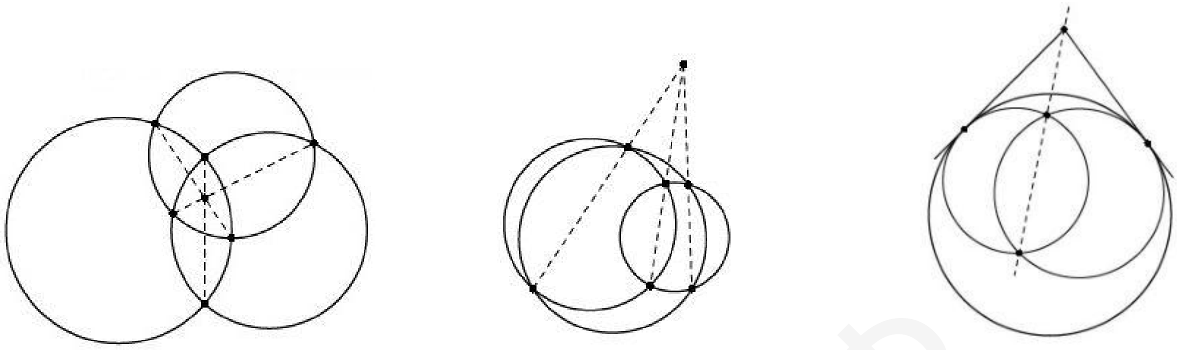
Задача 2. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружности с центром C и радиусом CA и окружности с центром M и радиусом MC проходит через середину AB.

▷ **Теорема.** *Даны окружности ω_1, ω_2, ω_3. Тогда радикальные оси ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.*

▷ Точка пересечения радикальных осей трёх окружностей, взятых попарно, называется *радикальным центром* этих окружностей.

Радикальная ось (продолжение)

Задача 3. Докажите, что прямые на рисунках пересекаются в одной точке:



Задача 4. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$, $AB \parallel CD$. Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

Задача 5. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отметили точки M и N так, что $BM = ND$, $AM = CN$. Оказалось, что четырёхугольники $BMNC$ и $AMND$ — вписанные. Докажите, что $MN \parallel AD$.

Задача 6. Окружность с центром J касается стороны BC треугольника ABC в точке A_1, а продолжений сторон AC и AB — в точках B_1 и C_1 соответственно, при этом прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны и пересекаются в точке D. Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую DJ. Найдите углы $\angle BEA_1$ и $\angle AEB_1$.

Указание. см. рисунок