Степень точки

▷ **Теорема о квадрате отрезка касательной.** *Если из точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.*

Задача 1. Точка B лежит между точками A и C. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. К отрезку AC в точке B проведён перпендикуляр до пересечения с большей окружностью в точке D. Из точки C проведена касательная CE к меньшей окружности. Докажите, что $CD = CE$.

▷ **Теорема об отрезках секущих.** *Пусть дана окружность и точка P, лежащая вне окружности. Через точку P проводятся две произвольные секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D. Тогда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

Задача 2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Окружность, описанная около треугольника ABM, повторно пересекает AC в точке K, а окружность, описанная около треугольника AMC, пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$.

▷ **Обратная теорема.** *На одной стороне неразвёрнутого угла с вершиной P отмечены точки A и B, а на другой — C и D. Если $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Задача 3. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AO и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки O на прямую AM опущен перпендикуляр OD. Докажите, что точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC.

▷ **Вспомогательная задача.** *Дана окружность ω радиуса r. На расстоянии d от её центра отмечена точка M. Прямая l, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что произведение $MA \cdot MB$ не зависит от выбора прямой l и равно $|d^2 - r^2|$.*

▷ Величина $d^2 - r^2$ называется **степенью точки M относительно окружности ω**.

Задача 4 (Формула Эйлера). В любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$.

