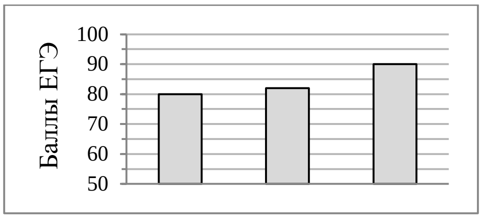
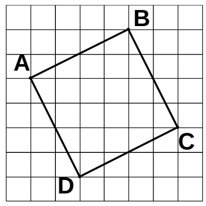
Вариант 8

1 При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы кратные 50 рублям. Готовясь к длительной командировке, Мария Глебовна хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 3400 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) она должна положить в приемное устройство данного терминала?

2 На диаграмме отражены данные по трем сданным ЕГЭ. Определите, во сколько раз балл по математике, отраженный в правом столбце, больше наименьшего балла из указанных.



3 Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $3\sqrt{5}$.



4 В чудесной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 15 июля, погода в Чудесной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 18 июля в Чудесной снова будет хорошая погода.

5 Найдите корень уравнения $\log_{x+11} 625 = 4$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 15, основание равно 18. Найдите радиус вписанной в него окружности.

7 Прямая $y = 7x + 3$ является касательной к графику функции $y = 8x^2 + bx + 11$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

8 Если каждое ребро куба увеличить на 9, то площадь его поверхности увеличится на 810. Найдите ребро куба.

9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[5]{m}\cdot\sqrt[20]{m}}$ при $m = 1296$.

10 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2 - \omega^2\right|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный положительный параметр, $\omega_p = 416\,c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более, чем на 576%. Ответ выразите в c^{-1}.

11 По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 140 метров, второй длиной 80 метров. В некоторый момент времени второй сухогруз находился позади первого, и расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляло 360 метров. Через 9 минут после этого уже первый сухогруз отставал от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равнялось 500 метрам. На сколько км/ч скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

12 Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+1024}$.

13 а) Решите уравнение $\log_7 5^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\log_7 25^{0,25\cos^2 x}+\log_7 25^{0,25-\frac{1}{4}\sin^2 x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-11;-4]$.

14 Образующая конуса равна диаметру его основания. В основание конуса вписан правильный треугольник. Через середину высоты конуса и сторону треугольника проведена плоскость α.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания конуса и плоскостью α равен $\dfrac{\pi}{3}$.

б) Найдите площадь сечения плоскостью α шара, вписанного в конус, если радиус основания конуса равен $4\sqrt{3}$.

15 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x+12)>\log_{x+5}(x^2+7x+12)$.

16 Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.

17 В магазин привезли пачки печенья трех видов: клубничное, кокосовое, малиновое, — в соотношении $8:1:3$. К концу дня продали 60% пачек малинового печенья и 60% пачек кокосового, при этом всего было продано 70% пачек печенья. Сколько процентов клубничного печенья магазин реализовал к концу дня?

18 При каких значениях параметра a данная система имеет ровно 2 решения?
$$\begin{cases} y^2-x^2\geq 0, \\ (y-a^2-3a+18)^2+(x-6a)^2=3\cdot|a|^{-\frac{a}{2}}. \end{cases}$$

19 Для каждого натурального числа введем число $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ (Например, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$). Определите наибольшее возможное $n\in\mathbb{N}$ в каждом из трех следующих случаев.

а) $\left(\dfrac{n!}{8}\right)\notin\mathbb{N}$.

б) $(n+2)!-42(n!)<0$.

в) $6500!$ делится на каждое из чисел k^k при $k=1,2,3,\ldots,n$.