

Тренировочные задачи

Минимаксные задачи с параметрами

1. (МГУ, геологич. ф-т, 1990) Найти все пары (a, b) , при которых уравнение

$$(3x^2 - 2a^2 + ab)^2 + (3a^2 - ab + 2b^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$$

имеет хотя бы один корень.

2. (МГУ, физический ф-т, 1996) При каждом a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

3. (МГУ, ИСАА, 1994) Найти все a , при которых уравнение

$$a^2 x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет хотя бы один корень.

4. (МГУ, физический ф-т, 2001) При каждом α найти все корни уравнения

$$\cos 2x + 2\sin^2(x + \alpha) + 2 = \sin \alpha,$$

принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

5. (МГУ, мехмат, 1993) Найти все $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, при которых уравнение

$$\sqrt{2\cos(x + \alpha) - 1} = \sin 6x - 1$$

имеет хотя бы один корень.

6. (МГУ, химический ф-т, 2001) При каждом a решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

7. (МГУ, ВМК, 1981) При каждом a решить уравнение

$$(1 + (a + 2)^2) \log_3(2x - x^2) + (1 + (3a - 1)^2) \log_{11} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

8. (МГУ, ВМК, 1989) Найти все a , при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} = \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)}$$

имеет хотя бы один целочисленный корень.

9. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) При каждом a решить систему

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ \frac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x + 4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}. \end{cases}$$

10. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) Найти все a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

11. (МГУ, ф-т почвоведения, 1983) Найти все $a \in (2; 5)$, при которых уравнение

$$\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[2; 3]$.

12. (МГУ, филологич. ф-т, 1985) Для каждого a решить уравнение

$$3 \cos x \sin a - \sin x \cos a - 4 \cos a = 3\sqrt{3}.$$

13. (МГУ, ф-т психологии, 1988) Найти наибольшее a , при котором неравенство

$$\sqrt{a^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{a}}{8x - x^2 - 16} \geq -\frac{2}{3}a|\cos \pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

14. (МГУ, ФНМ, 2004) Найти все b , при каждом из которых неравенство

$$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^x + (b^4 + 12 - 6b^2) \cdot \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x + 9^t + \frac{b^2}{4} + b \cdot 3^t - \sqrt{12} \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение (t, x) .

15. (МГУ, ФНМ, 2002) Найти все a , при каждом из которых неравенство

$$4^x + 4^{-x} + 8|2^x + 2^{-x} - a| + 11a < 26 + 2a(2^x + 2^{-x})$$

имеет хотя бы одно решение.

16. (МГУ, ф-т почвоведения, 1994) Найти все пары (a, b) , при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leq 1, \\ x^2 + ax + 1 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. (МГУ, географич. ф-т, 1986) Для каждого значения параметра a , удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + y^2 - 2a(x + y)$$

при условии $\cos \frac{\pi xy}{2} = 1$.

18. (МГУ, географич. ф-т, 1985) Найдите все числа a , удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел (x, y) .

19. (МГУ, ф-т почвоведения, 1988) Найти все значения параметра p , при каждом из которых существует единственная пара чисел (x, y) , удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leq 3 \sin y - 4 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi. \end{cases}$$

20. (МГУ, экономический ф-т, 2004) Найти наибольшее значение ω , при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4 \sin^2 y - \omega = 16 \sin^2 \frac{2x}{7} + 9 \operatorname{ctg}^2 \frac{2x}{7}, \\ (\pi^2 \cos^2 3x - 2\pi^2 - 72) y^2 = 2\pi^2(1 + y^2) \sin 3x. \end{cases}$$

21. (МГУ, ВМК, 1999) При каких a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left| \frac{a-2}{x+a} \right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

22. (МГУ, химический ф-т, 1994) При каких q разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \frac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin \frac{\pi x}{2} ? \end{cases}$$

Найдите её решения.

23. (МГУ, мехмат, 1978) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

24. (МГУ, мехмат, 1995) Найти все $\alpha \in [0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin \alpha = 0, \\ (x + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \sqrt{x} + \alpha^2 \sqrt{z} + \sin \frac{3\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

25. (МГУ, мехмат, 1988) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{(x + y)^2}{(a - \pi)^2}, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ z > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

26. (МГУ, биологич. ф-т, 2003) Найти все значения b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (\log_b f(x) - 1)^2 + (y^2 - 5 \cdot 10^3 \cdot y + 2b)^2 = 0, \\ z^2 - (b - 2 \cdot 10^6) \cdot z + 25 \cdot 10^{10} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = |x| + |x - 1^2| + |x - 2^2| + \dots + |x - 104^2|.$$

Ответы

1. $(2, -2), (-2, 2), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2. Если $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $x = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; если $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, то $x = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$; при остальных a решений нет.

3. $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

4. Если $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то $x = \frac{3\pi}{2}$; при остальных α решений нет.

5. $\alpha = -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}$.

6. Если $a = 0$, то $x = \pi + 2\pi n$ или $x = \frac{2\pi n}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$); если $a \neq 0$, то решений нет.

7. Если $a = \frac{1}{3}$, то $x = 1$; при остальных a решений нет.

8. $a \in \{2\pi - 8, 2\pi - 1, 2\pi\}$.

9. Если $a \neq 0$, то $x = 0$; если $a = 0$, то $x = 0, -1$.

10. $a = 0$ или $a = 1$.

11. $a = \frac{9\pi}{13}, \frac{15\pi}{13}$.

12. Если $a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; если $a = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$); при остальных a решений нет.
13. $\frac{1}{9}$.
14. $b = -\sqrt{3}$.
15. $a \in (-8; -4) \cup (7; +\infty)$.
16. $a = 2$, $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$); $a = -2$, $b \in \mathbb{R}$.
17. Если $a \in (0; 4 - 2\sqrt{2}]$, то наименьшее значение равно $-a^2$; если $a \in (4 - 2\sqrt{2}; 2)$, то наименьшее значение равно $8 - 8a$.
18. $a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.
19. $p = -2$ или $p = \frac{1}{2}$.
20. -14 .
21. $a \in [1; 2) \cup (2; 3]$.
22. Система разрешима при $q = \pm 4$. Если $q = 4$, то $x = -3$, $y = 0$; если $q = -4$, то $x = 1$, $y = 0$.
23. $a < -1$.
24. $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$.
25. $a \in [-2\pi; 0) \cup (2\pi; 4\pi]$.
26. $b \in [286624; 1000000] \cup [3000000; 3125000]$.