



Демонстрационный вариант  
 Профильного Единого государственного экзамена 2019  
 по математике

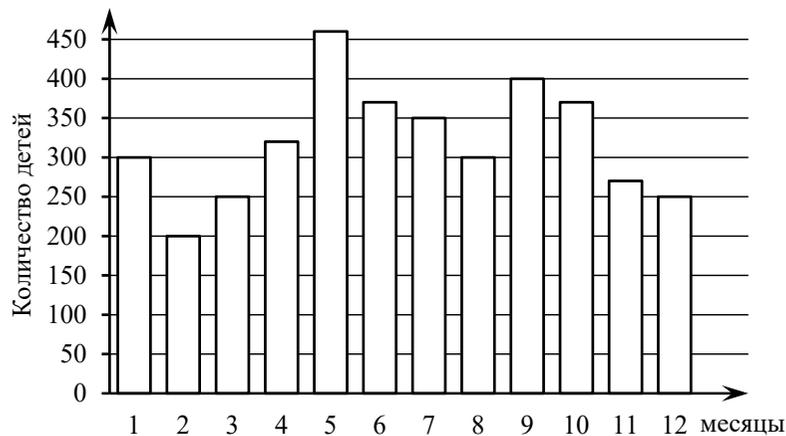
Вариант Л3 (лёгкий уровень)

Часть 1

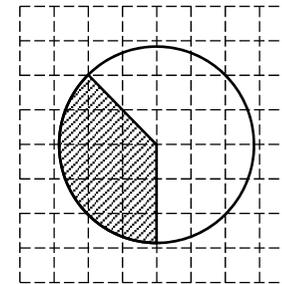
Ответом к заданиям 1—12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

1 Зимой 2 кг помидоров и 3 кг апельсинов стоят 270 рублей. Летом цена на помидоры снижается на треть, в результате 3 кг помидоров и 2 кг апельсинов стоят 230 рублей. Сколько рублей стоит килограмм помидоров зимой?

2 На диаграмме показана рождаемость в Троицке в течение года. Используя диаграмму, укажите количество месяцев, в которые родилось не более 250 детей.



3 Найдите площадь  $S$  незакрашенного сектора, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ . В ответе укажите величину  $S/\pi$ .

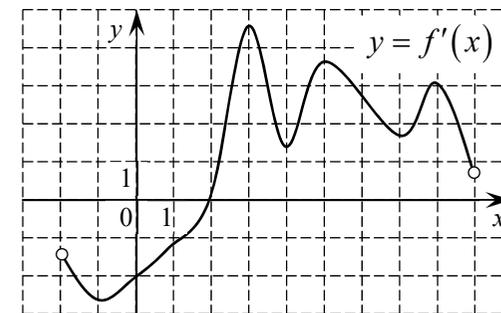


4 В стране единорогов бывает два типа погоды: хорошая и замечательная, причём погода держится неизменной в течение всего дня. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как сегодня. Сегодня 3 июля, и погода в стране единорогов замечательная. Найдите вероятность того, что 5 июля погода в стране единорогов тоже будет замечательная.

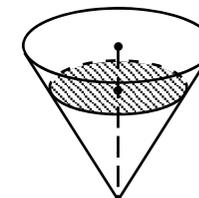
5 Решите уравнение  $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$ . Если корней получится больше одного, то в ответе укажите их сумму.

6 Точка  $C$  делит хорду  $AB$  окружности радиуса 6 на части  $AC = 4$  и  $BC = 5$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до ближайшей точки на окружности.

7 На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-2; 9)$ . В какой точке отрезка  $[3; 7]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



8 В бокале, имеющем форму правильного кругового конуса, уровень мартини достигает  $4/5$  высоты. Объём бокала 250 мл. Чему равен объём мартини? Ответ дайте в кубических миллилитрах?



Часть 2

9

Упростите выражение и найдите его значение при  $\alpha = \frac{11\pi}{12}$ :

$$\sqrt{4\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2 \alpha}$$

10

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака. При этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону:

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$$

где  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана,  $H_0 = 20$  метров — начальная высота столба воды,  $k = 1/1200$  — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>). Определите, через какое время после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды. Ответ дайте в минутах.

11

Три бригады укладывают рельсовый путь. Первая и третья бригады вместе укладывают в месяц 15 км пути, а все три бригады вместе укладывают в месяц вдвое больший путь, чем первая и вторая бригады вместе. Сколько километров пути в месяц укладывает третья бригада, если вторая и третья бригады вместе укладывают определенный участок пути вчетверо быстрее, чем одна вторая бригада?

12

Найдите наименьшее значение функции на отрезке  $[-3, 3]$ :

$$y = x^2 - 5|x + 1| - 2$$

**Для решения задач 13—19 используйте отдельные бланки. Запишите сначала номер задачи, а затем — полное обоснованное решение и ответ.**

13

а) Решите уравнение:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x} - \sqrt{3}\sin 2x$$

б) Найти все корни этого уравнения на отрезке  $[0; \pi]$ .

14

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны длины рёбер:  $AA_1 = 7$ ,  $AB = 16$ ,  $AD = 6$ . Точка  $K$  — середина ребра  $C_1 D_1$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку  $B$  перпендикулярно прямой  $AK$ , пересекает отрезок  $A_1 K$ .

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью  $ABC$ .

15

Решите неравенство:  $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7$ .

16

Окружность с центром  $O$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  большей боковой стороны прямоугольной трапеции  $ABCD$  и касается боковой стороны  $AD$  в точке  $T$ .

а) Докажите, что угол  $BOC$  вдвое больше угла  $BTC$ .

б) Найдите расстояние от точки  $T$  до прямой  $BC$ , если основания трапеции  $AB$  и  $CD$  равны 4 и 9 соответственно.

17

Вкладчик положил две одинаковые суммы под  $r\%$  годовых в банки «А» и «Б». Через год условия по вкладу в банке «А» изменились, и он понизил ставку до  $10\%$  годовых, в то время как банк «Б» оставил годовую ставку без изменений. Найдите наименьшее целое  $r$ , при котором вклад в банке «Б» через 3 года будет по крайней мере на  $20\%$  больше, чем вклад в банке «А».

18

Найти все  $a$ , при которых уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

19

На доске написано  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , каждое из которых не меньше 50, но не больше 150. Каждое из чисел  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) уменьшили на  $r_i\%$  соответственно. При этом для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) либо  $r_i = 2$ , либо число  $a_i$  уменьшилось на 2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел  $r_1, \dots, r_n$  быть равным 5?

б) Может ли оказаться, что среднее арифметическое чисел  $r_1, \dots, r_n$  больше 2, а сумма чисел  $a_1, \dots, a_n$  уменьшилась более чем на  $2n$ ?

в) Известно, что на доске написано 30 чисел и их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического чисел  $r_1, \dots, r_{30}$ .