Комплексные числа.

1. Найдите корни уравнений:
   $z^n = 1$;
   $z^n = \omega$, где ω — произвольное комплексное число.

2. Найдите:
   a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos k\varphi$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \sin k\varphi$; c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{3^k}$.

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC', BCA' и CAB'. Пусть C_1, A_1, B_1 — их центры.
   a) Пусть точки A, B, C соответствуют комплексным числам(координатам) a, b, c соответственно. Найдите координаты точек A', B', C'.
   b) На плоскости существует комплексная система координат, для которой A, B, C имеют координаты $0, 1, c$ соответственно.
   c) Треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.

4. Вычислите суммы:
   $C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + \ldots + C_{100}^{100}$;
   $C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 + \ldots + C_{100}^{100}$;
   $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 + \ldots + C_{100}^{100}$.

5. Докажите:
   a) $\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \operatorname{ctg}^2 x + 1$;
   b) $\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} \operatorname{ctg}^{2n-2j} \frac{\pi k}{2n+1} = 0$;
   c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$;
   d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$;
   e) Найдите $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

6. На единичной окружности отмечены n точек, являющиеся вершинами правильного n-угольника. Одна из них соединена хордами с остальными. Найдите произведение длин этих хорд.

7. Найдите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $x_{n+1} = 3x_n - 4y_n, y_{n+1} = 3y_n + 4x_n$ и
   a) $x_0 = 1, y_0 = 0$;
   b) $x_0 = 1, y_0 = 2$.