

Симметрические многочлены. Формула Виета.

1. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0$ является наименьшей?
2. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?
3. Числа x, y, z удовлетворяют системе
$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}. \end{cases}$$
Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a .
4. Выразите через элементарные симметрические многочлены следующие выражения:
 - a) $(x + y)(x + z)(y + z)$;
 - b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;
 - c) $x^3 + y^3$;
 - d) $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x^2 + z^2)$;
 - e) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$;
 - f) $x^4 + y^4 + z^4$.
5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$
6. Постройте многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.
7. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа $y_1 = x_2x_3, y_2 = x_1x_3, y_3 = x_1x_2$.
8. Известно, что целые числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 0$. Докажите, что $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ — квадрат целого числа.
9. Решите систему:
$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$
10. Известно, что $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.
11. Пусть известно, что все корни некоторого уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ положительны. Какому дополнительному условию должны удовлетворять его коэффициенты p, q и r для того, чтобы из отрезков, длины которых равны этим корням, можно было составить треугольник?
12. Положительные действительные числа a_1, \dots, a_n и k таковы, что $a_1 + \dots + a_n = 3k, a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел a_1, \dots, a_n отличаются больше, чем на 1.
13. Каждые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. Докажите, что $k^2 \geq \frac{25}{3}$.