7 класс

1.1. (***6 баллов***) Грузовик едет со скоростью 65 км/ч, а за ним едет легковой автомобиль – со скоростью 80 км/ч. На каком расстоянии друг от друга эти автомобили будут через две минуты после того, как легковой автомобиль догонит грузовик?

Ответ: 500 метров.

Скорость сближения автомобилей равна 80 – 65 = 15 (км/ч) = 250 (м/мин). Через две минуты после того, как автомобили поравняются, они будут находиться друг от друга на расстоянии $250 \times 2 = 500$ (м).

1.2. (***6 баллов***) Покажите, как разрезать произвольный прямоугольник на три части и сложить из них неравнобедренный треугольник.

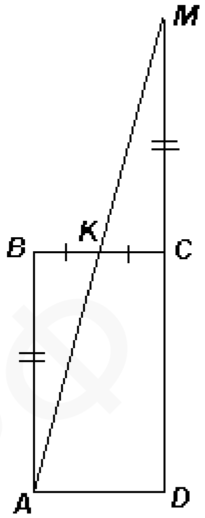


Рис. 1а

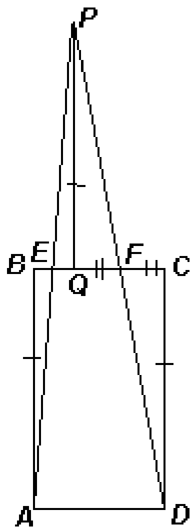


Рис. 1б

Существует несколько способов решения задачи. Рассмотрим два из них. Пусть *ABCD* – данный прямоугольник (см. рис. 1 а, б).

Первый способ. Пусть *K* – середина меньшей стороны *BC* (см. рис. 1а). Разрежем прямоугольник по прямой *AK* и приложим прямоугольный треугольник *ABK* так, как показано на рисунке. Треугольник *AMD* – искомый, причем еще один разрез можно сделать произвольно.

Второй способ. Выберем на меньшей стороне *BC* две точки *E* è *F* так, что $EF = \frac{1}{2}BC$ и $BE \neq CF$. Разрежем прямоугольник по прямым *AE* и *BF* и приложим прямоугольные треугольники *ABE* и *DCF* так, как показано на рисунке. Треугольник *APD* – искомый.

Выбор меньшей стороны (в обоих способах) гарантирует, что полученный треугольник не будет равнобедренным.

1.3. (***6 баллов***) В архипелаге каждый остров соединен мостом ровно с семью другими. Сколько в этом архипелаге островов, если мостов – 84?

Ответ: 24 острова.

Пусть в архипелаге *x* островов. Построим около каждого моста по две таможни – у выхода на каждый из двух островов, которые соединяет этот мост. Тогда всего будет построено $84 \times 2 = 168$ таможен. С другой стороны, так как каждый остров соединён с семью другими, то на каждом острове – по семь таможен, то есть всего их – $7x$. Следовательно, $x = \frac{168}{7} = 24$.

2.1. (***7 баллов***) Используя только цифры 1 и 7 (каждую из них – не более четырех раз), знаки арифметических действий и скобки, составьте выражение, значение которого равно 2006.

Ответ: например, $17 \times (117 + 1) = 2006$ или $17 \times 117 + 17 = 2006$ или $17 \times (17 \times 7 - 1) = 2006$.

2.2. (***7 баллов***) Точка *B* лежит на отрезке *AC*, причем *AB* = 2 см, *BC* = 1 см. На прямой *AB* укажите все такие точки *M*, для которых *AM* + *BM* = *CM*.

Рис. 2

<u>Ответ</u>: точки M_1 и M_2, лежащие от *A* на расстоянии 1 см (см. рис. 2).

Возможны четыре случая предполагаемого расположения искомых точек на прямой *AB* по отношению к трем данным точкам *A*, *B* и *C*.

1) Точка *M* лежит левее точки *A*, тогда *AM* + *BM* = *AM* + *BA* + *AM* = 2*AM* + 2; *CM* = *CA* + *AM* = *AM* + 3, следовательно, *AM* = 1. Искомая точка – M_1 (см. рис. 2).
2) Точка *M* принадлежит отрезку *AB*. Тогда *AM* + *BM* = *AB* = 2; *CM* = *CB* + *BM* = *BM* + 1, следовательно, *BM* = 1 = *AM*. Искомая точка – M_2 (см. рис. 2).
3) Точка *M* принадлежит отрезку *BC*. В этом случае решений нет, так как *AM* + *BM* ≥ *AB* = 2, а *CM* ≤ 1.
4) Точка *M* лежит правее точки *C*. В этом случае также нет решений, поскольку *BM* > *CM*.

При желании случаи 3) и 4) можно объединить.

Можно также считать прямую AB координатной, где A(0), тогда решением задачи будут точки M(x), удовлетворяющей уравнению $|x| + |x - 2| = |x - 3|$.

2.3. (***7 баллов***) Женя и Антон учатся в одном классе. У Антона одноклассников вчетверо больше, чем одноклассниц. А у Жени одноклассниц на 17 меньше, чем одноклассников. Кто Женя: девочка или мальчик?

<u>Ответ</u>: девочка.

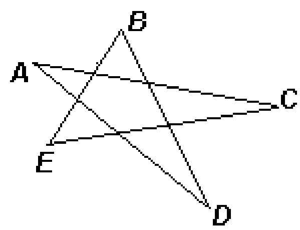
Пусть у Антона *x* одноклассниц, тогда одноклассников – 4x. Предположим, что Женя – мальчик, тогда одноклассниц и одноклассников у него столько же, сколько у Антона. Из условия задачи следует, что $4x - x = 17$. Так как 17 не делится на 3, то это уравнение не имеет натуральных решений, то есть наше предположение неверно.

Ïðåäïîëîæèì, ÷òî Æåíÿ – äåâî÷êà, òîãäà ó íåå (x – 1) îäíîêëàññíèöà è (4x + 1) îäíîêëàññíèê. Ñëåäîâàòåëüíî, (4x + 1) – (x – 1) = 17 ⇔ 4x – x + 2 = 17 ⇔ x = 5. Òàêèì îáðàçîì, ïðè takîì ïðåäïîëîæåíèè óñëîâèå çàäà÷è âûïîëíÿåòñÿ.

3.1. (***7 баллов***) Каждый из двух мальчиков, Ваня и Витя, задумал по натуральному числу, возвел его в куб и вычел задуманное им число. Полученные ими разности оказались одинаковыми. Могло ли так случиться, что Ваня и Витя задумали различные числа?

<u>Ответ</u>: нет, не могло.

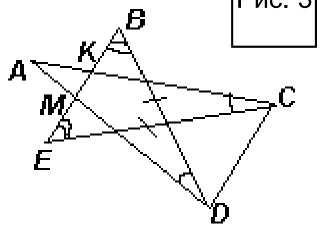
Пусть *a* и *b* – задуманные натуральные числа, тогда по условию $a^3 - a = b^3 - b$. Преобразуем: $(a^3 - b^3) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$. Так как при любых натуральных значениях *a* и *b* вторая скобка принимает положительные значения, то равенство возможно только при *a* = *b*.



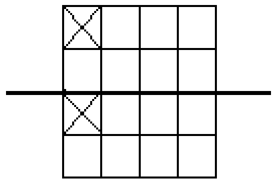
3.2. (***7 баллов***) В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, ∠*ACE* = ∠*ADB* и ∠*DBE* = ∠*BEC*. Известно также, что *BD* = *CE*. Докажите, что ∠*ACD* = ∠*ADC*.

Пусть AC и AD пересекают отрезок BE в точках K и M соответственно (см. рис. 3). Из условия задачи следует, что треугольники CEK и DBM равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $CK = DM$ и $\angle CKE = \angle DMB$. Тогда $\angle AKE = \angle AMB$ (углы, смежные с равными). Получим, что в треугольнике AMK равны углы, прилежащие к стороне MK, поэтому этот треугольник – равнобедренный ($AK = AM$). Следовательно, $AC = AK + CK = AM + DM = AD$, то есть треугольник ACD – также равнобедренный (с основанием CD). Поэтому $\angle ACD = \angle ADC$, что и требовалось доказать.

Рис. 3



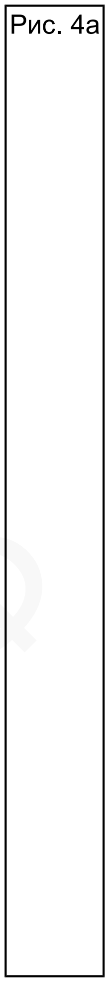
3.3. (***7 баллов***) Двое по очереди ставят крестики в клетки доски размером 4×4. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, в каждой клетке которого стоит крестик. Кто выиграет: начинающий или его партнер, и как нужно играть, чтобы выиграть?



<u>Ответ</u>: выигрывает второй игрок.

Ðàçäåëèì äîñêó íà äâå ðàâíûå ÷àñòè ãîðèçîíòàëüíîé ïðÿìîé (ñì. ðèñ. 4à). Íà êàæäûé õîä ïåðâîãî èãðîêà âòîðîé äîëæåí îòâå÷àòü òî÷íî òàêèì æå õîäîì, íî íà äðóãîé ÷àñòè äîñêè. Например, если первый игрок закрасил левый верхний угол, то второй должен закрасить на левой вертикали вторую клетку снизу.

Рис. 4а



Покажем, что такая стратегия второго игрока приведёт к его выигрышу. После каждого хода второго игрока картинка на обеих половинах доски будет одинаковой. Если после хода первого игрока в одной из половин доски не образовалось квадрата 2×2, заполненного крестиками, то и после хода второго в другой половине доски такого квадрата образоваться не может.

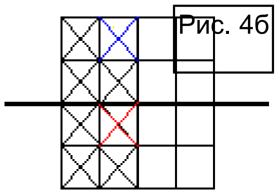


Рис. 4б

Допустим, что такой квадрат образовался после хода второго игрока íà «ñòûêå» двух половин доски. Но тогда такой же квадрат образовался ранее, после хода первого игрока на одной из половин доски (см., например, рис. 4б; последние ходы игроков обозначены синим и красным цветом соответственно).

Отметим, что вместо горизонтальной прямой, делящей доску на две равные части, можно использовать и вертикальную прямую.

Приведенное решение можно использовать и в случае, если доска для игры является прямоугольником размера $4\times n$.

4.1. (***8 áàëëîâ***) Учительница написала на доске три числа, отличные от нуля, и велела Диме одно из них уменьшить на треть, другое увеличить на четверть, а третье уменьшить на одну пятую и результаты записать в тетради. Оказалось, что в тетради Дима записал те же числа, что и на доске, но в другом порядке. Докажите, что Дима ошибся.

Пусть *x, y* и *z* – числа, записанные учительницей. Тогда числа, записанные Димой, в каком-то порядке равны $\frac{2}{3}x$; $\frac{5}{4}y$ и $\frac{4}{5}z$. Предположим, что Дима не ошибся. Далее можно рассуждать по разному.

<u>Первый способ</u>. Произведение чисел, записанных Димой, должно быть равно произведению чисел, записанных учительницей, то есть $\frac{2}{3}x \cdot \frac{5}{4}y \cdot \frac{4}{5}z = xyz$. Так как $xyz \neq 0$ и $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \neq 1$, то записанное равенство выполняться не может.

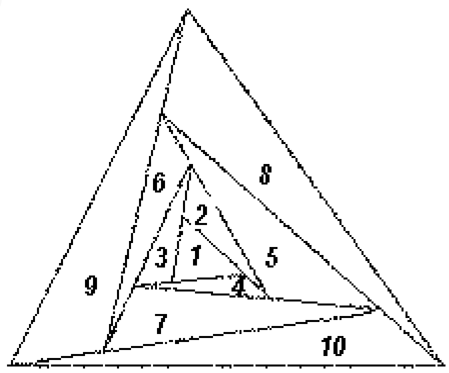
<u>Второй способ</u>. Учитывая, что среди записанных чисел нет нулей, получим два варианта возможных равенств: 1) $x = \frac{5}{4}y$; $y = \frac{4}{5}z$ и $z = \frac{2}{3}x$; 2) $z = \frac{5}{4}y$; $x = \frac{4}{5}z$ и $y = \frac{2}{3}x$.

1) Из первого равенства следует, что $4x = 5y$, а из второго – что $5y = 4z$, поэтому $x = z$, что противоречит третьему равенству.

2) Из первого равенства следует, что $4z = 5y$, а из второго – что $5x = 4z$, поэтому $x = y$, что противоречит третьему равенству.

Таким образом, Дима ошибся, что и требовалось доказать.

4.2. (***8 баллов***) Можно ли разрезать произвольный треугольник на 10 треугольников так, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?



<u>Ответ</u>: да, можно.

Рис. 5

См., например, рис. 5.

4.3. (***8 баллов***) Найдите наибольшее число, составленное из различных цифр (в десятичной записи) и делящееся на любую свою цифру.

<u>Îòâåò</u>: 9867312.

Среди цифр искомого числа не может быть нуля (на нуль делить нельзя), поэтому искомое число – не более чем девятизначное. Для того, чтобы оно делилось на 5, необходимо, чтобы его десятичная запись оканчивалась этой цифрой, но тогда это число не будет делится на четные цифры, то есть будет не более чем пятизначным. Поэтому исключаем цифру 5, и рассматриваем числа, составленные из остальных цифр. Если число – восьмизначное и не содержит цифр 0 и 5, то сумма его цифр равна 40, то есть оно не делится ни на 3, ни на 9 и будет в этом случае не более чем шестизначным. Следовательно, нам выгоднее исключить одну цифру так, чтобы оставшаяся сумма цифр делилась на 9.

Поэтому исключаем цифру 4 и рассматриваем четные семизначные числа, составленные из различных цифр, кроме 0, 5 и 4. Наибольшее среди таких чисел – 9876312, его сумма цифр равна 36, поэтому оно делится на 9 и на 3. Так как 312 делится на 8, то рассматриваемое число также делится на 8. На 6 оно делится потому, что делится на 2 и на 3. Но это число не делится на 7. Значит надо так переставить цифры этого числа, чтобы сохранить делимость на 8 и добавить делимость на 7, при этом затрагивая как можно меньше старших разрядов.

Так как 132 не делится на 8, то придется переставлять по крайней мере четыре последние цифры. Составляя таким образом числа, делящиеся на 8 (9872316, 9872136, 9871632), непосредственной проверкой убеждаемся, что они не делятся на 7. Поэтому, требуемая перестановка должна коснуться и разряда десятков тысяч. Наибольшее среди чисел, получаемых такой перестановкой, это 9867312. Оно делится на 7 (9867312 : 7 = 1409616), и при такой перестановке сохраняется делимость на остальные цифры.