

11 класс.

1.1. Числа x и y таковы, что $\frac{xy}{x^2 + 6y^2} = \frac{1}{5}$. Найдите значение выражения $\frac{xy}{x^2 - 6y^2}$.

Ответ: ± 1 .

Первый способ. Из условия задачи следует, что $xy \neq 0$ и $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно переменной x , получим, что $x = 2y$ или $x = 3y$.

Если $x = 2y$, то $\frac{xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{2y \cdot y}{4y^2 - 6y^2} = \frac{2y^2}{-2y^2} = -1$; если $x = 3y$, то $\frac{xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y \cdot y}{9y^2 - 6y^2} = \frac{3y^2}{3y^2} = 1$.

Второй способ. Из условия следует, что $y \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель

данной дроби на y^2 : $\frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6} = \frac{1}{5}$.

Пусть $t = \frac{x}{y}$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, корнями которого являются числа 2 и 3. Таким образом, $\frac{xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{t}{t^2 - 6} = \pm 1$.

1.2. Боковые рёбра четырехугольной пирамиды имеют длины 1, 6 и 11. Может ли основание этой пирамиды быть квадратом?

Ответ: нет, не может.

Предположим, что основанием данной пирамиды является квадрат. Рассмотрим треугольник, стороны которого – боковые рёбра с длинами 1 и 6. Длина его третьей стороны, являющейся либо стороной, либо диагональю квадрата, меньше 7. В обоих случаях получим, что длина стороны квадрата меньше 7.

Рассмотрим треугольник, стороны которого – боковые рёбра длины 1 и 11. Его третья сторона также является либо стороной, либо диагональю квадрата, поэтому ее длина должна быть меньше, чем $7\sqrt{2}$. Так как $1 + 7\sqrt{2} < 11$, то треугольника с такими длинами сторон не существует, то есть, основание данной пирамиды квадратом быть не может.

1.3. На шахматной доске отмечены центры всех клеток. Рассмотрим все векторы, начало которых в центре черной клетки, а конец – в центре белой клетки. Докажите, что сумма этих векторов равна нулевому вектору.

Для каждой черной клетки существует черная клетка, симметричная ей относительно центра доски. Аналогичное утверждение верно и для каждой белой клетки. Следовательно, каждому построенному вектору будет соответствовать вектор, ему центрально симметричный. Разобьем сумму всех рассматриваемых векторов на пары центрально симметричных векторов. Центрально симметричные вектора являются противоположными, поэтому сумма векторов в каждой паре равна нулевому вектору, следовательно и сумма всех векторов также равна нулевому вектору.

2.1. Пусть $f(x)$ – некоторая функция, определенная на всей числовой прямой. Известно, что функция $f(f(x))$ – непрерывная. Верно ли, что функция $f(x)$ – непрерывная?

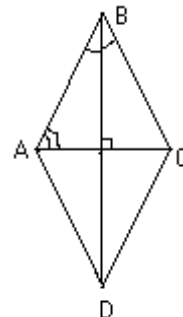
Ответ: нет, не верно.

Приведем несколько примеров: 1) Функция $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \neq 1, \\ 3, & \text{если } x = 1. \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 1$, при этом $f(f(x)) = 2$ для любых x , поэтому, функция $f(f(x))$ непрерывна на R .

2) Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 0$, при этом $f(f(x)) = x$ для любых x , поэтому, функция $f(f(x))$ непрерывна на R .

3) **Функция Дирихле:** $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ не является непрерывной ни в одной точке! При этом $f(f(x)) = 1$ для любых x , поэтому, функция $f(f(x))$ – непрерывна на $\mathbb{R}$.

2.2. $ABCD$ – ромб. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BDC , равен 4 см. Найдите периметр ромба.



Ответ: 19, 2 см.

Первый способ. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle CBD = \angle ABD = 90^\circ - \alpha$ (см. рис. 1). Пусть R_1 и R_2 – радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BDC соответственно. Тогда, по следствию из теоремы синусов для $\triangle ABC$: $BC = 2R_1 \cdot \sin \alpha$. Аналогично, для $\triangle BDC$: $CD = 2R_2 \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 2R_2 \cdot \cos \alpha$. Так как $BC = CD = a$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_2}{R_1}$. При заданных числовых значениях: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{3}{5}$; $a = 4,8$ (см); $P_{ABCD} = 19,2$ (см).

Рис. 1

Можно также получить соотношение между стороной ромба и данными радиусами в явном виде: $\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{4R_1^2}$; $\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{4R_2^2}$; тогда $\frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) = 1$, то есть,

$$a = \frac{2R_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Второй способ. Очевидно, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{\triangle BCD}$. Воспользуемся формулой: $S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}$, где a , b и c – стороны треугольника; R – радиус описанной около него окружности. Тогда $\frac{BD}{AC} = \frac{R_2}{R_1}$, то есть $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_2}{R_1}$. Дальнейшие вычисления проводятся аналогично проделанным выше.

2.3. Найдите все натуральные значения n , для которых выполняется равенство: $n^3 - n = n!$

Ответ: $n = 5$.

Запишем данное уравнение в виде $n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Так как $n = 1$ не является его решением, то разделим обе части уравнения на $n(n-1)$. Получим, что $n+1 = (n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Проверая последовательные натуральные значения n , начиная с $n = 2$, получим, что решением уравнения является $n = 5$.

Так как для всех $n > 5$ $n+1 < 2n-4 = 2(n-2)$, то $n+1 < (n-2) \cdot 2 < (n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, поэтому других натуральных решений данное уравнение не имеет.

3.1. Решите уравнение: $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

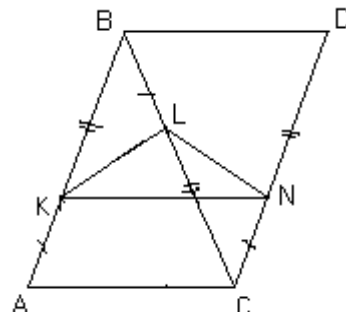
Ответ: 0; 1.

Пусть $t = \sqrt[12]{x} \geq 0$, тогда $t^2 = \sqrt[6]{x}$ и $t^3 = \sqrt[4]{x}$. Данное уравнение примет вид: $\frac{2^t + 2^{t^3}}{2} = 2^{t^2}$.

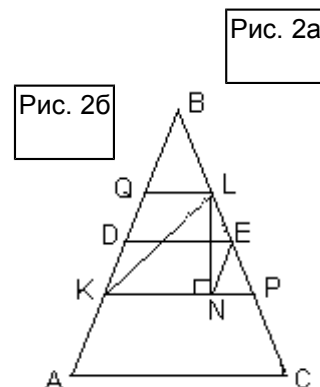
Воспользуемся дважды неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{2^t + 2^{t^3}}{2} \geq \sqrt{2^t \cdot 2^{t^3}} = 2^{\frac{t+t^3}{2}} \geq 2^{\sqrt{t \cdot t^3}} = 2^{t^2}$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $t = t^3$. Учитывая, что $t \geq 0$, получим, что $t = 0$ или $t = 1$, то есть, $x = 0$ или $x = 1$.

Отметим, что возможно аналогичное решение без замены переменных.

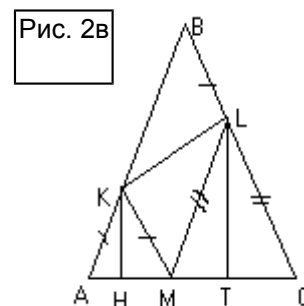
3.2. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $AK = BL$. Докажите, что $KL \geq \frac{1}{2} AC$.



Первый способ. Достроим данный треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ и на стороне CD отложим отрезок $CN = BL$ (см. рис. 2а). Тогда из равенства треугольников KBL и NCL следует, что $LN = KL$, а из того, что $AKNC$ – параллелограмм, следует, что $AC = KN$. Применив неравенство треугольника для $\triangle KLN$ получим, что $KL + LN \geq KN$, то есть, $KL \geq \frac{1}{2} AC$, что и требовалось доказать.



Второй способ Проведем DE – среднюю линию треугольника ABC . Если KL совпадает с DE , то $KL = \frac{1}{2} AC$. В противном случае проведем также отрезки KP и LQ , параллельные AC (см. рис. 2б). Так как $AK = CP = BL = BQ$, то DE – средняя линия равнобокой трапеции $KPLQ$. Пусть LN – высота этой трапеции, тогда $KL > KN = DE = \frac{1}{2} AC$. Таким образом, $KL \geq \frac{1}{2} AC$, что и требовалось доказать.



Третий способ. Проведем $KM \parallel BC$ (см. рис. 2в), тогда $\triangle AKM$ – равнобедренный, то есть, $KM = AK = BL$. Следовательно, $KMLB$ – параллелограмм, то есть, $ML \parallel AB$ и $ML = KB = LC$.

Проведём высоты KH и LT в равнобедренных треугольниках AKM и MLC соответственно. Так как эти высоты являются медианами, то $HT = \frac{1}{2} AC$, а $HT \leq KL$, так как HT – ортогональная проекция отрезка KL на прямую AC . Таким образом, $KL \geq \frac{1}{2} AC$, что и требовалось доказать.

Четвертый способ. Проведем KH и LT – перпендикуляры к прямой AC (см. рис. 2в), тогда $HT \leq KL$. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, тогда $AH = AK \cdot \cos \alpha$, $CT = CL \cdot \cos \alpha$. Следовательно, $AH + CT = (AK + CL) \cdot \cos \alpha = AB \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} AC$, поэтому, $HT = \frac{1}{2} AC$. Таким образом, $KL \geq \frac{1}{2} AC$, что и требовалось доказать.

3.3. Решая числовой ребус ДВА + ТРИ = ПЯТЬ, Вася получил 150 возможных ответов. Верно ли, что Вася нашел все решения ребуса?

Ответ: нет, не верно.

Пусть найдено какое-то решение данного ребуса. Тогда существуют еще три решения этого ребуса, которые получаются из него следующим образом: 1) перестановкой числовых значений букв А и И; 2) перестановкой числовых значений букв В и Р; 3) осуществлением обеих перестановок. Отметим, что перестановка числовых значений букв Д и Т в решении ребуса не приводит к новому решению, так как буква Т присутствует еще и в правой части равенства.

Рассмотрим множество решений данного ребуса и разобьем его на четыре непересекающихся подмножества: 1) $B > P$ и $A > I$; 2) $B > P$ и $A < I$; 3) $B < P$ и $A > I$; 4) $B < P$ и $A < I$ (неравенства – строгие, так как различным буквам должны соответствовать различные цифры). Каждому решению из одного подмножества соответствует ровно одно решение из любого другого подмножества и эти соответствия взаимно однозначны, поэтому эти подмножества содержат равные количества элементов.

Следовательно, общее количество решений ребуса должно быть кратно 4, а число 150 на 4 не делится.

С помощью компьютера можно найти все решения данного ребуса. Оказывается, что их – 180.

4.1. Найдите значение выражения: $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg} 44^\circ)$.

Ответ: 2^{22} .

Так как $1 + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos 45^\circ}$, то $1 + \operatorname{tg} 1^\circ = \frac{\sin 46^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 45^\circ}$,
 $1 + \operatorname{tg} 2^\circ = \frac{\sin 47^\circ}{\cos 2^\circ \cdot \cos 45^\circ}$, ..., $1 + \operatorname{tg} 43^\circ = \frac{\sin 88^\circ}{\cos 44^\circ \cdot \cos 45^\circ}$, $1 + \operatorname{tg} 44^\circ = \frac{\sin 89^\circ}{\cos 44^\circ \cdot \cos 45^\circ}$.
 Таким образом, $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg} 44^\circ) = \frac{\sin 46^\circ \cdot \sin 47^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \cos 44^\circ \cdot (\cos 45^\circ)^{44}}$.
 Учитывая, что $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, получим: $\sin 89^\circ = \cos 1^\circ$, $\sin 88^\circ = \cos 2^\circ$, ..., $\sin 46^\circ = \cos 44^\circ$, откуда следует, что исходное выражение равно: $\frac{1}{(\cos 45^\circ)^{44}} = (\sqrt{2})^{44} = 2^{22}$.

4.2. По горизонтальной прямой s произвольным образом «катаются» две окружности, радиусы которых r и R . К ним проведены две общие внутренние касательные, пересекающиеся в точке M . По какой траектории движется точка M ?

Ответ: по прямой, параллельной s и находящейся от нее на расстоянии $\frac{2Rr}{R+r}$.

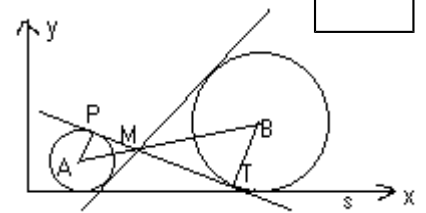


Рис. 3а

Пусть A и B – центры данных окружностей; P и T – точки касания окружностей с одной из данных касательных (см. рис. 3а). Так как при гомотетии с центром M одна из окружностей переходит в другую, то M лежит на прямой AB . Кроме того, $AM : MB = r : R$ (это соотношение можно также получить из подобия треугольников APM и BTM).

Введем на плоскости декартову систему координат так, чтобы прямая s являлась осью абсцисс. Тогда точка A движется по прямой $y = r$, а точка B

– по прямой $y = R$. В этом случае: $y_M = \frac{R \cdot y_A + r \cdot y_B}{y_A + y_B} = \frac{2Rr}{R+r}$, то

есть, ордината точки M постоянна (не зависит от положения окружностей). Следовательно, точка M движется по прямой, параллельной s и находящейся от нее на расстоянии y_M .

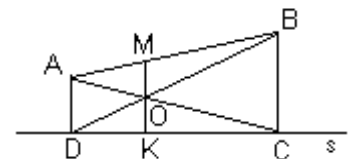


Рис. 3б

Этот же результат можно получить геометрически. Опустим перпендикуляры AD и BC на прямую s (см. рис. 3б). Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Длина отрезка MK , содержащего точку O и параллельного основаниям трапеции, является средним гармоническим длин оснований, то есть, $MK = \frac{2Rr}{R+r}$. При этом, $MK \perp s$ и

$AM : MB = AO : OC = AD : BC = r : R$, то есть, M – точка, заданная в условии задачи.

4.3. На столе лежат три кучки камней, в одной из которых 5 камней, в другой – 49, а в третьей – 51. Разрешается делать две операции: 1) складывать любые две кучки камней в одну; 2) любую кучку с четным количеством камней делить на две равные кучки. Можно ли, выполняя только эти операции, разложить камни на кучки по одному?

Ответ: нет, нельзя.

Так как количество камней в каждой кучке нечетно, то сначала придется сложить какие-либо две кучки в одну. Рассмотрим возможные варианты:

1) Сложим в одну кучки из 5 камней и 49 камней. Получим две кучки: 54 камня и 51 камень. Оба количества камней **кратны трем**. Так как числа 3 и 2 взаимно просты, то при дальнейшем применении разрешенных операций могут получаться только кучки, количество камней в которых также кратно трем. Следовательно, количество камней в любой кучке не может стать меньше трех и разложить камни на кучки по одному невозможно.

2) Сложим в одну кучки из 5 камней и 51 камня. Получим две кучки: 56 камней и 49 камней. Оба количества камней **кратны семи**. Аналогичными рассуждениями получим, что количество камней в любой кучке не может стать меньше семи, что также не позволит разложить камни их в кучки по одному.

3) Сложим кучки из 49 камней и 51 камня. Получим две кучки: 100 камней и 5 камней. Оба количества камней **кратны пяти**, что также не позволит разложить их в кучки по одному камню.

5.1. Известно, что для чисел a , b и c выполняются равенства: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ и $a^2 = 2(b + c)$. Найдите число a .

Ответ: 0; 2; -4.

Рассмотрим выражение $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ и разложим его на множители: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + z^3 - 3xyz = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y)$

$$+ y) - 3xyz = (x + y + z)((x + y)^2 - (x + y)z + z^2) - 3xy(x + y + z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Заметим также, что выражение во второй скобке может принимать только неотрицательные значения, то есть, $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y = z$.

Это можно доказать различными способами, например: 1) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0,5(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) = 0,5((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) \geq 0$; 2) записав три верных неравенства: $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$; $\frac{y^2 + z^2}{2} \geq yz$; $\frac{z^2 + x^2}{2} \geq zx$ и сложив их.

Пусть $x = a$, $y = -b$, $z = -c$, тогда $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca)$. По доказанному выше, равенство $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ выполняется если $a = b + c$ или $a = -b = -c$.

Из равенства $a^2 = 2(b + c)$ в первом случае получим, что $a^2 = 2a \Leftrightarrow a = 0$ или $a = 2$, а во втором случае: $a^2 = -4a \Leftrightarrow a = 0$ или $a = -4$.

Отметим, что если само тождество $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ известно, то доказать его можно и проще: раскрыть скобки в правой части и привести подобные слагаемые.

Также можно было преобразовывать первое из данных равенств, используя, например, замену переменных: $u = b + c$, $v = bc$. Так как $b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 - bc + c^2) = (b + c)((b + c)^2 - 3bc)$, то это равенство примет вид: $a^3 - (u^3 - 3uv) = 3av \Leftrightarrow (a - u)(a^2 + au + u^2) + 3v(u - a) = 0 \Leftrightarrow (a - u)(a^2 + au + u^2 - 3v) = 0$. Выполнив обратную замену, получим, что $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca) = 0$. Дальнейшее решение совпадает с уже изложенным.

5.2. Площадь ортогональной проекции некоторого параллелепипеда на плоскость одной из его граней в два раза больше площади этой грани, площадь его ортогональной проекции на плоскость другой грани в полтора раза больше площади этой грани, и наконец, площадь его проекции на плоскость третьей грани равна площади этой грани. Найдите плоские углы в гранях данного параллелепипеда.

Ответ: в четырех гранях все углы по 90° ; в двух гранях — 45° и 135° .

Рассмотрим ортогональную проекцию параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ на плоскость грани $ABCD$. Пусть площадь этой проекции равна площади $ABCD$, тогда эта грань является проекцией грани $A_1B_1C_1D_1$, то есть, ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 перпендикулярны рассматриваемым граням. Следовательно, грани ABB_1A_1 , BB_1C_1C , CC_1D_1D и DD_1A_1A являются прямоугольниками (см. рис. 4).

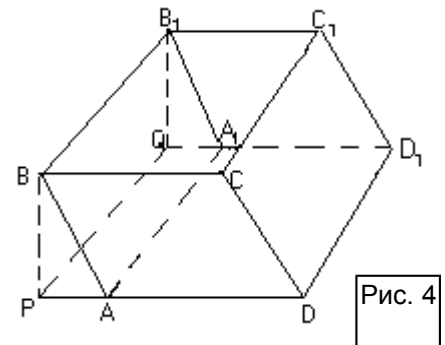


Рис. 4

Пусть PQD_1D — ортогональная проекция параллелепипеда на плоскость грани AA_1D_1D . $S_{PQD_1D} = DP \cdot AA_1 = (AD + AP) \cdot AA_1 = (AD + AB \cdot \cos \angle PAB) \cdot AA_1$.

$\angle PAB = \alpha$ — острый угол в грани $ABCD$, который является углом между плоскостями граней ABB_1A_1 и $ABCD$. Угол между плоскостями параллельных им граней CC_1B_1B и CC_1D_1D также равен α , поэтому рассматривая проекцию параллелепипеда на плоскость CC_1D_1D аналогично получим, что площадь этой проекции равна $(CD + BC \cdot \cos \alpha) \cdot CC_1$.

По условию, найденные площади соответственно равны $1,5AD \cdot AA_1$ и $2CD \cdot CC_1$. Обозначим: $AD = a$; $AB = CD = b$; $AA_1 = CC_1 = c$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a + b \cos \alpha)c = 1,5ac \\ (b + a \cos \alpha)c = 2bc \end{cases} \text{ Упростим ее: } \begin{cases} b \cos \alpha = 0,5a \\ a \cos \alpha = b \end{cases} \text{ Перемножив уравнения почленно,}$$

имеем: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$, то есть, $\alpha = 45^\circ$.

Отметим, что после того, как было доказано, что четыре грани параллелепипеда являются прямоугольниками, мы практически рассматривали не ортогональные проекции этого параллелепипеда на плоскости граней, а ортогональные проекции параллелограмма $ABCD$ на прямые AD и CD .

5.3. На доске было записано 17 двузначных чисел. Математик выбрал одно из них и возвел его в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на каждое из оставшихся шестнадцати. Верно ли, что оно делится и на их произведение?

Ответ: верно.

Если двузначное число n разложить в произведение простых множителей, то есть, представить в виде: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 6$. Действительно, наименьшим простым множителем является число 2, а максимальным показателем степени в разложении может быть 6, так как $2^6 = 64 < 100$, а $2^7 = 128 > 100$.

Рассмотрим выбранное число m в сотой степени. По условию m^{100} кратно каждому из оставшихся чисел $n_1, n_2, \dots, n_{16}$, следовательно, m^{100} кратно каждому простому делителю любого из этих чисел, причем в разложение числа m^{100} каждый из этих простых делителей входит с показателем степени, не меньшим ста.

Разложение произведения $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{16}$ на простые множители содержит те же множители, причем показатель степени каждого из них не превосходит $16 \times 6 = 96 < 100$. Значит, m^{100} делится на $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{16}$, что и требовалось доказать.