

10 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. Решите уравнение: $2\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = \frac{10}{x - 4}$.

Ответ: 5.

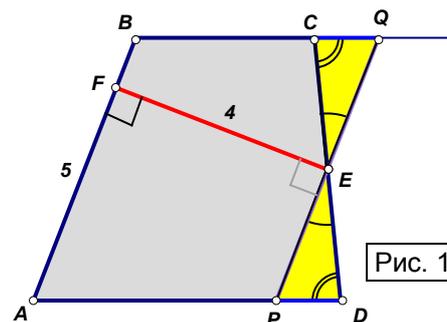
Так как левая часть уравнения принимает только положительные значения, то $x > 4$.

Так как на $(4; +\infty)$ функция $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9}$ возрастает, а функция $g(x) = \frac{10}{x - 4}$ убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. При этом $f(5) = g(5)$, то есть $x = 5$ – корень данного уравнения.

1.2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) из точки E – середины CD провели перпендикуляр EF к прямой AB . Найдите площадь трапеции, если $AB = 5$, $EF = 4$.

Ответ: 20.

Без ограничения общности можно считать, что $AD > BC$. Проведем через точку E прямую, параллельную боковой стороне AB , и отметим точки P и Q ее пересечения с прямыми AD и BC соответственно (см. рис. 1). Тогда четырехугольник $ABQP$ – параллелограмм. Кроме того, равны треугольники PED и QEC (по стороне и двум прилежащим к ней углам), значит, равны и их площади.



Таким образом, $S_{ABCD} = S_{ABQP} = AB \cdot EF = 20$.

1.3. Найдите все пары $(p; q)$ простых чисел, разность пятых степеней которых является простым числом.

Ответ: $(3; 2); (2; 3)$.

Так как $p^5 - q^5$ делится на $(p - q)$, то эта разность может являться простым числом только в том случае, когда $|p - q| = 1$. Из того, что разность двух простых чисел равна 1, следует, что $p = 3, q = 2$ (или наоборот).

Проверим: $3^5 - 2^5 = 243 - 32 = 211$ – простое число, так как оно нечетное и не делится ни на одно из чисел: 3, 5, 7, 11, 13 ($15^2 = 225 > 211$).

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Найдите значение выражения $\sqrt{1 + 2011^2 + \left(\frac{2011}{2012}\right)^2} + \frac{2011}{2012}$.

Ответ: 2012.

Пусть $2011 = a$, тогда $\sqrt{1 + a^2 + \left(\frac{a}{a+1}\right)^2} + \frac{a}{a+1} = \frac{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 \cdot (a+1)^2 + a^2}}{a+1} + \frac{a}{a+1} =$

$$\frac{\sqrt{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 + a}}{a+1} = \frac{\sqrt{(a^2)^2 + a^2 + 1^2 + 2 \cdot a^2 \cdot a + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot 1 + a}}{a+1} = \frac{\sqrt{(a^2 + a + 1)^2 + a}}{a+1} =$$

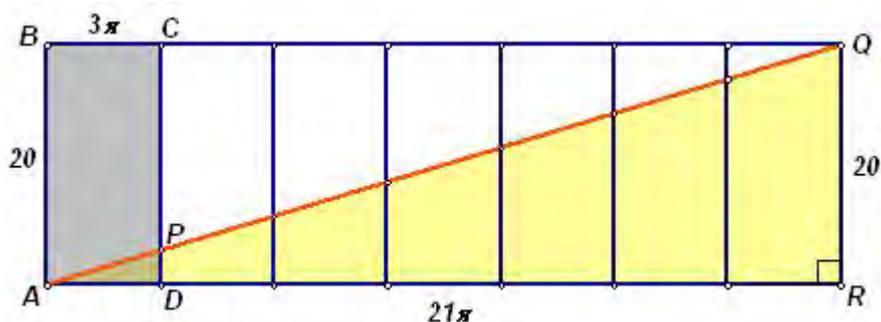
$$\frac{(a+1)^2}{a+1} = a+1. \text{ Таким образом, значение данного выражения равно } 2012.$$

Отметим, что преобразовывать подкоренное выражение можно иначе: не раскрывать скобки, а группировать слагаемые, предварительно вычтя и прибавив выражение $2a(a+1)$.

2.2. Вокруг цилиндрической колонны высотой 20 метров и диаметра 3 метра обвита лента, которая поднимается от подножия до вершины семью полными витками. Какова длина ленты?

Ответ: $\sqrt{400 + 441\pi^2}$ метров.

Разрезав цилиндр вдоль образующей его боковой поверхности, проходящей через начало ленты, и развернув эту поверхность на плоскость, получим прямоугольник $ABCD$ размером $20 \times 3\pi$ (см. рис. 2).



«Приклеив» к нему еще шесть таких же прямоугольников, получим прямоугольник $ABQR$. На этой развертке первый виток ленты предстанет в виде отрезка AP , а вся лента развернется в диагональ AQ прямоугольника $ABQR$.

Значит, ее длина: $l = AQ = \sqrt{RQ^2 + AR^2} = \sqrt{20^2 + (21\pi)^2} = \sqrt{400 + 441\pi^2} \approx 68,9$ (метров).

Отметим, что находить приближенное значение длины ленты от учащих не требуется.

2.3. На доске записаны числа: 4, 14, 24, ..., 94, 104. Можно ли стереть сначала одно число из записанных, потом стереть еще два, потом – еще три, и, наконец, стереть еще четыре числа так, чтобы после каждого стирания сумма оставшихся на доске чисел делилась на 11?

Ответ: нет, нельзя.

Заметим, что одиннадцать записанных целых чисел составляют арифметическую прогрессию, поэтому их сумма делится на 11 ($S = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11$, при этом, числа a_1 и a_{11} имеют одинаковую четность). Следовательно, для того, чтобы после первого стирания сумма оставшихся чисел делилась на 11, необходимо, чтобы стертое число также делилось на 11. Кроме того, после четырехкратного стирания останется одно число, которое опять-таки должно делиться на 11. Но среди записанных чисел есть только одно число, кратное одиннадцати, это число 44. Таким образом, последовательно выполнить указанные операции невозможно.

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

3.1. Найдите наименьшее положительное значение $x + y$, если $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Преобразуем данное равенство: $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

1) Пусть $1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 0$, тогда полученное равенство можно записать так: $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 1$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x+y) = 1 \Leftrightarrow x+y = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае, наименьшее положительное значение $x + y$ равно $\frac{\pi}{4}$.

2) Пусть $1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0$, тогда полученное равенство примет вид $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$. Но система уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y, \\ -\operatorname{tg}^2 x = 1 \end{cases}$, поэтому она не имеет решений. То

есть, в этом случае значений x и y , удовлетворяющих данному равенству, не существует.

3.2. Внутри прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка P , из которой опущены перпендикуляры PK и PM на катеты AC и BC соответственно. Прямые AP и BP

пересекают катеты в точках A' и B' соответственно. Известно, что $\frac{S_{\Delta APB'}}{S_{\Delta KPB'}} = m$. Найдите

$$\frac{S_{\Delta MPA'}}{S_{\Delta BPA'}}$$

Ответ: $\frac{S_{\Delta MPA'}}{S_{\Delta BPA'}} = \frac{1}{m}$.

Так как треугольники PAB' и PKB' имеют общую высоту PK , то $\frac{S_{\Delta APB'}}{S_{\Delta KPB'}} = \frac{AB'}{KB'}$ (см.

рис. 3). Аналогично, $\frac{S_{\Delta BPA'}}{S_{\Delta MPA'}} = \frac{BA'}{MA'}$.

Докажем, что $\frac{AB'}{KB'} = \frac{BA'}{MA'}$. Для этого

докажем равносильное равенство $\frac{KB'}{KA} = \frac{MA'}{MB}$.

Пусть $\angle KAP = \angle MPA' = \alpha$, $\angle MBP = \angle KPB' = \beta$, тогда $\frac{KB'}{KA} = \frac{KP \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ и

$$\frac{MA'}{MB} = \frac{MP \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \text{ Таким образом, равенство доказано, значит, } \frac{S_{\Delta MPA'}}{S_{\Delta BPA'}} = \frac{S_{\Delta KPB'}}{S_{\Delta APB'}} = \frac{1}{m}.$$

Отметим, что для доказательства требуемой пропорциональности отрезков можно провести похожие рассуждения, в которых вместо тангенсов углов используется несколько пар подобных треугольников. Такой способ решения попутно показывает, что полученный результат справедлив и в более общем случае, когда треугольник ABC – произвольный, а отрезки PK и PM параллельны его сторонам CB и CA .

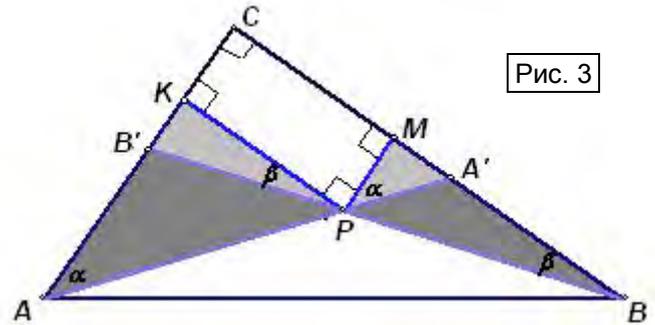
3.3. В турнире по волейболу n команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P – сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q – сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

Пусть x_k и y_k соответственно – количество побед и поражений команды с номером k . Заметим, что сумма количества побед и количества поражений у каждой команды одна и та же, то есть $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dots = x_n + y_n = n - 1$. Кроме того, общее количество побед в турнире равно общему количеству поражений, то есть $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$.

Тогда $P - Q = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = (x_1^2 - y_1^2) + (x_2^2 - y_2^2) + \dots + (x_n^2 - y_n^2) = (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_2 + y_2)(x_2 - y_2) + \dots + (x_n + y_n)(x_n - y_n) = (n-1)((x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (y_1 + y_2 + \dots + y_n)) = 0$. Следовательно, $P = Q$, что и требовалось.

Отметим, что это же решение можно записать короче, если использовать обозначение суммы: $P - Q = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n y_k^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 - y_k^2) = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)(x_k - y_k) =$

$$(n-1) \left(\sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n y_k \right) = 0.$$



4.1. Существуют ли такие значения a и b , при которых уравнение $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ имеет четыре различных действительных корня?

Ответ: нет, не существуют.

Преобразуем данное уравнение, прибавив к обеим частям одно и то же выражение:
 $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + ax + b = -4x + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^4 + (a + 4)x + b - 1 = 0$.

Пусть $t = x - 1$, тогда полученное уравнение примет вид: $t^4 + (a + 4)(t + 1) + b - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow t^4 = -(a + 4)t - (a + b + 3)$.

Докажем, что уравнение вида $t^4 = mt + n$ ни при каких значениях m и n не может иметь четыре различных действительных корня.

Первый способ. График функции $y = t^4$ имеет вид параболы, а график функции $y = mt + n$ – прямая, и они не могут иметь более двух точек пересечения (см. рис. 4).

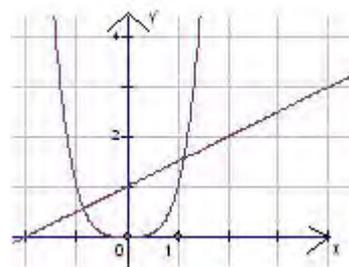


Рис. 4

Второй способ. Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - mt - n$. Ее

производная: $f'(t) = 4t^3 - m$ определена на множестве R и обращается в нуль в

одной точке: $t_0 = \sqrt[3]{\frac{m}{4}}$. Функция $f(t)$ непрерывна на R , убывает на $(-\infty; t_0]$ и возрастает на

$[t_0; +\infty)$, значит, t_0 – ее единственная точка экстремума (точка минимума). Следовательно, график $y = f(t)$ не может иметь более двух точек пересечения с осью абсцисс.

4.2. Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ меньше 1. Может ли длина каждой из диагоналей AD , BE и CF быть не меньше двух?

Ответ: нет, не может.

Докажем, что длина хотя бы одной из этих диагоналей меньше двух. Рассмотрим треугольник ACE (см. рис. 5). Без ограничения общности можно считать, что $AE \leq AC \leq CE$.

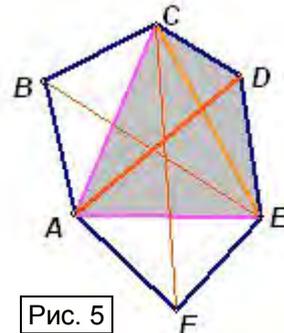


Рис. 5

Тогда для четырехугольника $ACDE$ запишем неравенство Птолемея: $AD \cdot CE \leq AC \cdot DE + AE \cdot CD$. (Его доказательство – см., например, Я.П. Понарин. *Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости.* – М.: МЦНМО, 2004, стр. 86 или В.В. Прасолов. *Задачи по планиметрии.* М.: МЦНМО, 2007, №9.70.)

Разделим обе части этого неравенства на CE и используем, что $CD < 1$, $DE < 1$, $AE \leq CE$ и $AC \leq CE$.

$$\text{Получим: } AD \leq \frac{AC}{CE} \cdot DE + \frac{AE}{CE} \cdot CD < 1 + 1 = 2.$$

4.3. Каждый узел бесконечной сетки покрашен в один из четырех цветов так, что вершины любого квадрата со стороной 1 окрашены в разные цвета. Верно ли, что в этой сетке найдется прямая, содержащая бесконечно много узлов, которые окрашены только в два цвета? (Сетка образована горизонтальными и вертикальными прямыми. Расстояние между соседними параллельными прямыми равно 1.)

Ответ: да, верно.

Из условия задачи следует, что на любой горизонтальной или вертикальной прямой узлы одного цвета не могут быть соседними. Рассмотрим какую-нибудь горизонтальную прямую m данной сетки. Если на ней чередуются узлы только двух цветов, то она и является искомой.

Пусть это не так, и на прямой m находятся узлы более двух цветов, тогда в каком-то месте три узла разных цветов идут подряд. Обозначим эти цвета слева направо через A , B и

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| n | | | | | |
| | A | B | C | | |
| m | C | D | A | | |
| | A | B | C | | |
| k | C | D | A | | |
| | A | B | C | | |
| | | p | q | r | |

Рис. 6

С (см. рис. 6). Над точкой цвета B (и под ней) может находиться только точка четвертого цвета (обозначим его D), слева от которой должна быть точка цвета C , а справа – точка цвета A . Над точкой цвета D (и под ней) может находиться только точка цвета B , слева от нее – точка цвета A , а справа – точка цвета C .

Таким образом, на горизонтальных прямых n и k повторилась раскраска трех точек прямой m . Рассуждая аналогично, получим, что такая раскраска будет неограниченно повторяться как вверх, так и вниз. Значит, нашлись уже три вертикальные прямые (p , q и r), на которых бесконечно чередуются узлы двух цветов.

Пятый тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

5.1. Решите неравенство: $[x] \cdot \{x\} < x - 1$. (Напомним, что $[x]$ – целая часть числа x , $\{x\}$ – дробная часть числа x .)

Ответ: $[2; +\infty)$.

Обозначим: $[x] = a$, $\{x\} = b$, тогда $x = a + b$.

Данное неравенство примет вид: $ab < a + b - 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 < 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) < 0$.

Так как для любых значений x выполняется неравенство $0 \leq \{x\} < 1$, то $b < 1$. Тогда $a > 1$, то есть $[x] > 1$. Следовательно, $x \geq 2$.

5.2. Докажите, что в любой правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковыми гранями больше, чем 60° .

Рассмотрим правильную пирамиду $SABC$ и проведем перпендикуляр BH_1 к боковому ребру SA (см. рис. 7а). Так как боковые грани пирамиды равны, то $CH_1 = BH_1$ и $CH_1 \perp SA$. Таким образом, $\angle BH_1C = \varphi$ – линейный угол двугранного угла между боковыми гранями пирамиды. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Предположим, что $\varphi \leq 60^\circ$, тогда BC – меньшая сторона равнобедренного треугольника BH_1C , то есть $BC \leq CH_1$ (см. рис. 7а). Так как $AC = BC$, то $AC \leq CH_1$, значит, в прямоугольном треугольнике AH_1C гипотенуза не больше катета, что невозможно.

Таким образом, $\varphi > 60^\circ$, что и требовалось.

Второй способ. Пусть сторона треугольника ABC равна a , тогда высота AA_1 этого треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

(см. рис. 7а). Отрезок H_1A_1 является ортогональной проекцией отрезка AA_1 на плоскость BH_1C , поэтому $H_1A_1 \perp BC$ и $H_1A_1 < AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\operatorname{tg} \angle H_1BA_1 = \frac{H_1A_1}{BA_1} < \sqrt{3}$, то есть $\angle H_1BA_1 < 60^\circ$. Тогда $\angle BH_1A_1 > 30^\circ$, а $\varphi > 60^\circ$, что и требовалось.

Третий способ. Пусть плоский угол при вершине пирамиды равен α (см. рис. 7а).

Тогда $BA_1 = SB \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ и $BA_1 = BH_1 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = SB \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2SB \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$.

Следовательно, $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. Так как $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, то $\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} > 1$, то есть $\sin \frac{\varphi}{2} > \frac{1}{2}$. Таким

образом, $\frac{\varphi}{2} > 30^\circ$, значит, $\varphi > 60^\circ$, что и требовалось.

Возможны также аналогичные рассуждения, с помощью которых можно получить равенство, выражающее зависимость между углом φ и углом β наклона бокового ребра

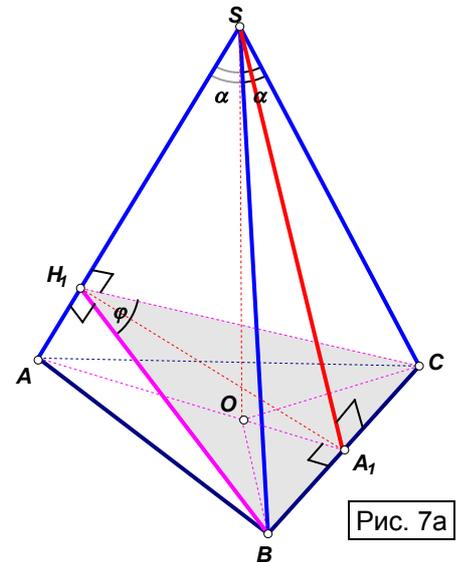


Рис. 7а

к плоскости основания: $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{3} \cdot \sin \beta$ или равенство, выражающее зависимость

между углом φ и углом γ наклона боковой грани к плоскости основания: $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sin \gamma$, после чего несложно сделать требуемую оценку. Для вывода этих и аналогичных равенств удобно также использовать «формулу трех косинусов».

Четвертый способ. Можно воспользоваться любой из двух теорем косинусов для трехгранных углов: 1) $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_1$ или 2) $\cos \gamma_1 = -\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \gamma$, где α, β и γ – плоские углы трехгранного угла, а α_1, β_1 и γ_1 – двугранные углы, соответственно им противолежащие.

Применим любое из этих утверждений к трехгранному углу с вершиной A , у которого один плоский угол равен 60° , а два других равны по θ , а соответствующие им двугранные углы – это искомый угол φ и два угла, величиной по γ . (см. рис. 7а):

$$1) \cos 60^\circ = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \varphi, \text{ тогда } \cos \varphi = \frac{0,5 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{0,5 - (1 - \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} = 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} < 0,5,$$

так как $0 < \theta < 90^\circ$;

$$2) \cos \varphi = -\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos 60^\circ = -\cos^2 \gamma + (1 - \cos^2 \gamma) \cdot 0,5 = 0,5 - 1,5 \cos^2 \gamma < 0,5, \text{ так как } 0 < \gamma < 90^\circ.$$

В каждом из случаев получим: $\varphi > 60^\circ$, что и требовалось.

Для получения требуемой оценки можно также попробовать сослаться на непрерывность и предельные положения.

Действительно, если «до упора сплющивать» пирамиду, то есть устремить вершину S к центру O основания (см. рис. 7б), то в пределе получим, что $\varphi = 180^\circ$.

Если же, напротив, неограниченно её «растягивать», то есть устремить вершину S к бесконечности в направлении перпендикуляра, восстановленного к плоскости основания ABC в его центре O (см. рис. 7в), то в пределе получим, что $\varphi = 60^\circ$.

Однако, при таком подходе сложно строго обосновать, что функция $\varphi(x)$, где $x = SO$, убывает на $[0; +\infty)$.

Есть также еще одно «соблазнительное» рассуждение: угол BH_1C является ортогональной проекцией угла BAC , равного 60° , на плоскость BH_1C , а «ортогональная проекция угла не меньше самого угла».

Но последнее утверждение, которое часто выглядит «очевидным», выполняется далеко не всегда. Например, рассмотрим треугольник ABC , в котором угол A – острый, а угол C – тупой, и спроектируем его на плоскость, содержащую прямую BC и перпендикулярную плоскости ABC (см. рис. 7ã). Тогда проекцией острого угла BAC является угол $BA'C$, величина которого 0° .

5.3. Решите уравнение в целых числах: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = m^2$

Ответ: $n = 0$; $m = \pm 1$ или $n = -1$; $m = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = (n^4 + 2n^3 + n^2) + (n^2 + 2n + 1) = n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^2 = (n^2 + 1)(n + 1)^2$. В правой части уравнения стоит квадрат целого числа, поэтому выражение $(n^2 + 1)(n + 1)^2$ также должно являться точным

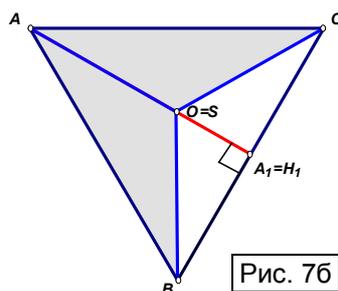


Рис. 7б

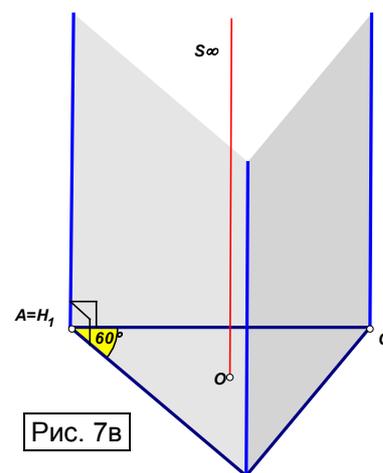


Рис. 7в

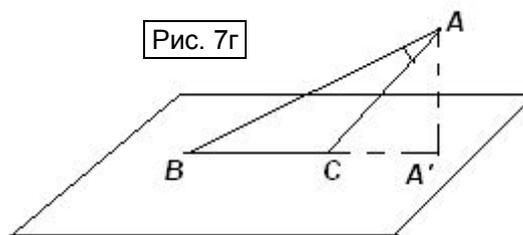


Рис. 7г

квадратом. Это возможно в двух случаях: 1) $n^2 + 1$ является полным квадратом, значит, $n = 0$. Тогда $m^2 = 1$, то есть $m = \pm 1$; 2) $n + 1 = 0$, то есть $n = -1$. Тогда $m = 0$.