10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

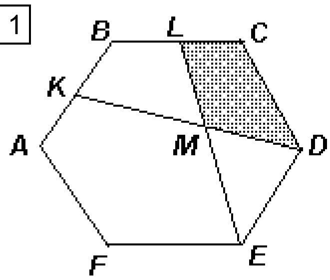
1.1. Известно. что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2011. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

Ответ: два корня.

Из условия задачи следует, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Следовательно, его дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$. Упрощенный дискриминант уравнения $ax^2 + 2bx + 4c = 0$ также равен $b^2 - 4ac$, значит оно также имеет два корня.

1.2. Точки K и L – середины сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$. Отрезки KD и LE пересекаются в точке M. Площадь треугольника DEM равна 12. Найдите площадь четырехугольника $KBLM$.

Рис. 1



Ответ: 12.

Так как четырехугольник $KBCD$ является образом четырехугольника $LCDE$ при повороте вокруг центра $ABCDEF$ на угол 60°, то эти четырехугольники равны, а значит, и равновелики (см. рис. 1). Вычитая из площади каждого из них площадь четырехугольника $LCDM$, получим, что $S_{KBLM} = S_{DEM}$ = 12.

1.3. Найдите наименьшее число, кратное 45, десятичная запись которого состоит только из единиц и нулей.

Ответ: 1111111110.

Число кратно 45, если оно кратно каждому из двух взаимно простых чисел: 9 и 5. Так как искомое число делится на 9, то его сумма цифр должна делится на 9. Следовательно, количество единиц в искомом числе кратно девяти. Число, кратное пяти, может оканчиваться на 0 или на 5, но второй случай невозможен по условию. Таким образом, учитывая, что искомое число должно быть наименьшим, оно должно содержать 9 единиц и оканчиваться нулем.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Функция $f(x)$ определена для всех x, кроме 1, и удовлетворяет равенству: $(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + f(x)$. Найдите $f(-1)$.

Ответ: –1.

Подставим в данное равенство значения $x = 0$ и $x = -1$. Получим: $\begin{cases} -f(-1) = f(0), \\ -2f(0) = -1 + f(-1) \end{cases}$. Следовательно, $2f(-1) = -1 + f(-1)$, то есть $f(-1)$ = –1.

Отметим, что можно решить и более общую задачу: найти f(x) для всех значений x ≠ 1. Действительно, заменим в исходном равенстве x на $\frac{x+1}{x-1}$*. Получим, что*

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}+f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{x-1}f(x)=\frac{x+1}{x-1}+f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2}{x-1}f(x)-\frac{x+1}{x-1}.$$

Подставив полученный результат в исходное равенство, получим, что $2f(x)-(x+1)=x+f(x)$*, то есть* $f(x)=2x+1$.

Этот «фокус» оказался возможным в связи с тем, что при $x \neq 1$ для функции $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ выполняется равенство $f\left(f(x)\right)=x$. Это означает, что функция $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ и ей обратная совпадают.

2.2. Основания описанной трапеции равны 2 и 11. Докажите, что продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под острым углом.

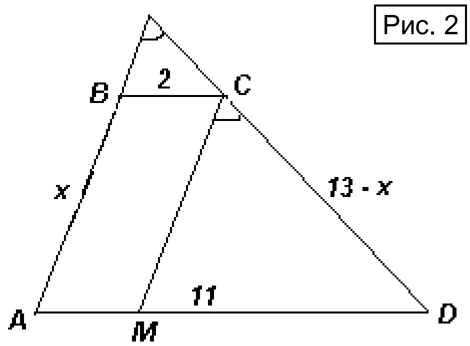


Рис. 2

Пусть *ABCD* – данная трапеция с основаниями *BC* = 2 и *AD* = 11 (см. рис. 2). Проведём *CM* || *BA*, тогда угол между продолжениями боковых сторон трапеции равен углу *DCM*. Пусть *CM* = *AB* = *x*, тогда *DC* = 13 – *x* (так как *ABCD* – описанная трапеция).

В треугольнике *DCM*: $MD^2 = (AD - BC)^2 = 81$; $CM^2 + CD^2 = x^2 + (13 - x)^2$. Так как $CM^2 + CD^2 - MD^2 = 2x^2 - 26x + 88 = 2(x - 6{,}5)^2 + 1{,}75 > 0$, то $CM^2 + CD^2 > MD^2$, значит, угол *DCM* – острый, что и требовалось.

2.3. В шахматном турнире участвовало 8 человек и в итоге они набрали разное количество очков (каждый играл с каждым один раз, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0). Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четверо последних набрали вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое место?

Ответ: выиграл шахматист, занявший третье место.

Заметим, что занявшие четыре последних места, сыграли друг с другом 6 партий, разделив между собой 6 очков. Поэтому, у шахматиста, занявшего второе место, не может быть менее шести очков.

Докажем, что более шести очков у него быть не может. Действительно, 6,5 или 7 очков у него может быть только в одном случае: если он выиграл у всех игроков, занявших более низкие места, и не проиграл победителю, но тогда количество очков победителя турнира будет не больше, чем у занявшего второе место.

Полученное противоречие показывает, что шахматист, занявший второе место, набрал ровно 6 очков, значит, игроки, занявшие четыре последних места, проиграли все партии игрокам, занявшим места выше них.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Найдите наименьшее значение $x^2 + y^2$, если $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$.

Ответ: 0,5.

Преобразуем исходное равенство: $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - (y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y + 5) = 0$. Далее можно рассуждать по-разному.

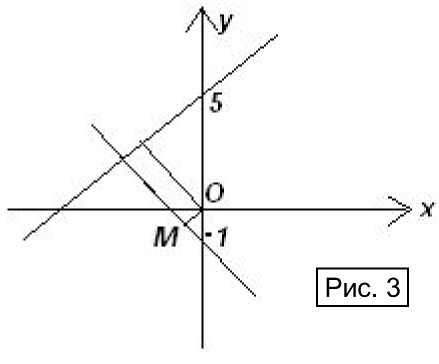


Рис. 3

Первый способ. Рассмотрим график полученного уравнения и найдем на нем точку, для которой выражение $x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение. Так как полученное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} y=-x-1, \\ y=x+5 \end{array}\right.$, то его графиком является объединение двух прямых, которые пересекают ось *y* в точках (0; –1) и (0; 5) (см. рис 3.). Искомое выражение $x^2 + y^2$ выражает квадрат расстояния от точки *M*(*x*; *y*) до начала координат, поэтому, его значение будет наименьшим, если *M* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *O*(0; 0) на ближайшую к этой точке прямую. Учитывая, что обе прямые отсекают от осей координат равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 5, получим, что ближе к точке $O(0;\ 0)$ находится прямая $y = -x - 1$, тогда $OM^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0{,}5$.

Второй способ. Пусть $x^2 + y^2 = a$, тогда условие задачи можно переформулировать так: «При каком наименьшем значении a система уравнений $\begin{cases}(x+y+1)(x-y+5)=0,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ имеет решения?». Эта система равносильна совокупности: $\begin{cases}x+y=-1,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ или $\begin{cases}x-y=-5,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ Для каждой из полученных систем уравнений найдем требуемое значение a.

1) $\begin{cases}x+y=-1,\\ x^2+y^2=a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x-1,\\ x^2+(x+1)^2=a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x-1,\\ 2x^2+2x+(1-a)=0\end{cases}$. Полученная система имеет решения т. и т. т., когда имеет решения квадратное уравнение, то есть, если $1 - 2(1 - a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0{,}5$.

2) $\begin{cases}x-y=-5,\\ x^2+y^2=a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+5,\\ x^2+(x+5)^2=a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+5,\\ 2x^2+10x+(25-a)=0\end{cases}$. Рассуждая аналогично случаю 1), получим: $25 - 2(25 - a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 12{,}5$.

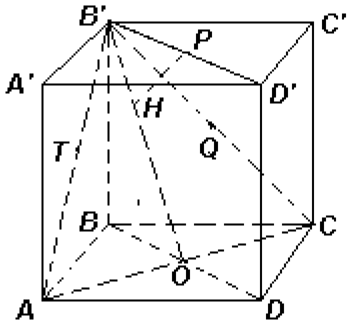
Таким образом, $a = 0{,}5$ – наименьшее значение a, при котором совокупность систем имеет решение.

Отметим, что и второй способ решения можно изложить на языке геометрии: искомое значение а – это квадрат наименьшего радиуса окружности с центром в начале координат, которая имеет хотя бы одну общую точку с графиком исходного уравнения (см. рис. 3).

3.2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1 точки T, P и Q – центры граней $AA'B'B$, $A'B'C'D'$ и $BB'C'C$ соответственно. Найдите расстояние от точки P до плоскости ATQ.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рис. 4а



Заметим, что вершины B' и C куба лежат в плоскости ATQ, поэтому, плоскости ATQ и $AB'C$ совпадают (см. рис. 4а). Плоскости $AB'C$ и BDD' перпендикулярны, так как плоскость $AB'C$ содержит перпендикуляр AC к плоскости BDD'. Значит, основание H перпендикуляра, опущенного из точки P на $AB'C$, лежит на прямой $B'O$ пересечения плоскостей $AB'C$ и BDD'.

Далее можно воспользоваться тем, что плоскость $AB'C$ перпендикулярна диагонали BD' куба (*так как концы этой диагонали равноудалены от вершин треугольника* $AB'C$) и делит ее в отношении 1 : 2, считая от точки B. Тогда $D'B = \sqrt{3}$, расстояние от точки D' до плоскости $AB'C$ равно $\frac{2}{3}DB'$, а расстояние от точки P до плоскости $AB'C$ еще в два раза меньше, то есть равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

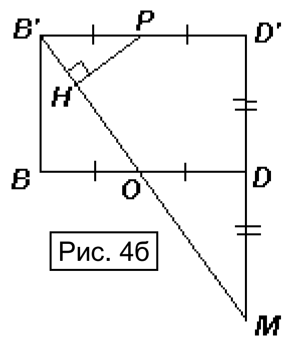


Рис. 4б

Также можно сделать отдельный чертеж прямоугольника $BB'D'D$ и, например, продлить отрезок $B'O$ до пересечения с прямой $D'D$ в точке M (см. рис. 4б). Тогда из подобия треугольников $B'PH$ и $B'MD'$ получим: $\frac{PH}{D'M} = \frac{B'P}{B'M}$. Учитывая, что $B'D' = \sqrt{2}$, $B'M = \sqrt{6}$, $PH = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Существуют и другие способы вычисления длины PH.

3.3. Целые числа a, b и c таковы, что $(a - b)(b - c)(c - a) = a + b + c$. Докажите, что число $a + b + c$ делится на 27.

Рассмотрим остатки от деления на 3 чисел *a*, *b* и *c* и докажем, что они одинаковые. Действительно:
1) Если эти остатки попарно различны, то равенство, записанное в условии, не выполняется, так как ни одна из разностей в его левой части не делится на 3, а правая часть делится на 3.
2) Если два числа имеют одинаковые остатки при делении на 3, а третье число дает другой остаток от деления на 3, то равенство из условия также не выполняется, так как левая часть равенства будет кратна трем (одна из разностей кратна трем), а правая часть равенства не будет кратна трем.

Таким образом, остается единственный случай: все числа имеют одинаковый остаток при делении на 3. Тогда каждая из разностей в левой части равенства делится на 3, следовательно, их произведение делится на 27, а, значит, и правая часть, равная *a* + *b* + *c*, делится на 27.

Отметим, что такие числа a, b и c существуют, например, 15, 18 и 21 или 50, 53 и 59 (от школьников это проверять не требуется).

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

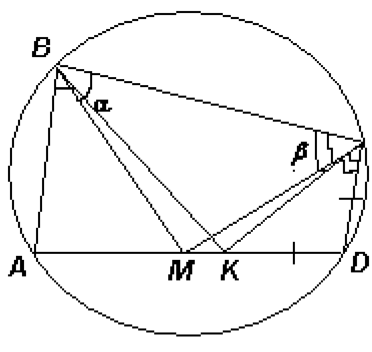
4.1. Докажите, что если *x* > 0, *y* > 0, *z* > 0 и $x^2+y^2+z^2=1$, то $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\geq\sqrt{3}$ и укажите, в каком случае достигается равенство.

Пусть $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \geq 0$, тогда $S^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{xz}{y}\right)^2+2x^2+2y^2+2z^2$.
Воспользуемся неравенством: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, равенство в котором достигается, если *a* = *b* = *c*. Получим: $S^2\geq 3x^2+3y^2+3z^2=3$.

Следовательно, $S\geq\sqrt{3}$, что и требовалось доказать. Равенство достигается, если $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.2. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Биссектрисы углов *B* и *C* пересекаются в точке, лежащей на отрезке *AD*. Найдите *AD*, если *AB* = 5, *CD* = 3.

Рис. 5а



Ответ: *AD* = 8.

Пусть *M* – точка пересечения биссектрис углов *B* и *C* (см. рис. 5а – в).

I способ. Обозначим: $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle BCD = 2\beta$, тогда $\angle ADC = 180° - 2\alpha$, $\angle BAD = 180° - 2\beta$ (см. рис. 5а).

Пусть $\alpha < \beta$. Выберем на луче *DA* такую точку *K*, что *DK* = *DC* = 3, тогда *K* лежит между *M* и *D* и $\angle KCD = \angle CKD = \alpha$. Следовательно, $\angle CKM + \angle CBM = 180°$, значит, около четырехугольника *MKCB* можно описать окружность. Тогда $\angle KBM = \angle KCM = \beta - \alpha$, значит, $\angle ABK = \beta = \angle AKB$, следовательно, *AK* = *AB* = 5; *AD* = *DK* + *AK* = 8.

В случае, если $\alpha > \beta$, можно провести аналогичное рассуждение, откладывая на луче *AD* отрезок *AK*, равный *AB*. Случай $\alpha = \beta$ невозможен, иначе *ABCD* – равнобокая трапеция (*AB* = *DC*), что противоречит условию.

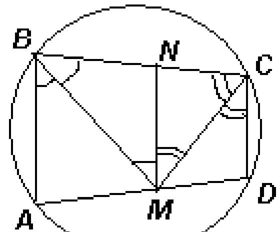


Рис. 5б

II способ. Рассмотрим два случая.
1) *AB* || *DC*. Тогда *ABCD* – равнобокая трапеция (*BC* = *AD*, см. рис. 5б). Проведём *MN* || *AB*. Из равенства накрест лежащих углов получим: *BN* = *NM* = *NC*, значит, *MN* – средняя линия трапеции, то есть

$MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$. Следовательно, $AD = BC = 2MN = AB + CD = 8$.

2) AB пересекает DC в точке T. Тогда M – либо центр вписанной окружности треугольника BTC, либо центр вневписанной окружности этого треугольника (см. рис. 5в). Так как рассуждения в этих случаях полностью аналогичны, то рассмотрим только второй из них.

Пусть отрезок $A'D'$ симметричен стороне AD относительно биссектрисы TM угла BTC. Тогда $\angle DA'M = \angle D'AM = \angle TCB$, так как $ABCD$ – вписанный четырехугольник, значит, $A'D' \parallel BC$. Из равенства накрест лежащих углов получим, что $A'M = A'C$. Аналогично, $D'M = D'B$, кроме того, $AD' = A'D$ (из симметрии). Таким образом, $AD = A'D' = A'M + D'M = A'C + D'B = AB + CD = 8$.

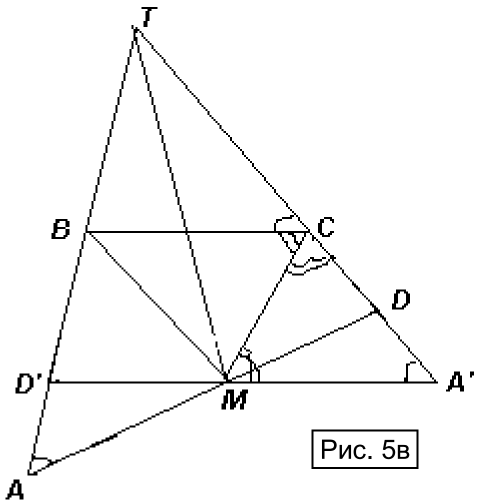


Рис. 5в

4.3. Существуют ли два многоугольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны?

<u>Ответ</u>: да, существуют.

Например, пятиугольники, см. рис. 6.

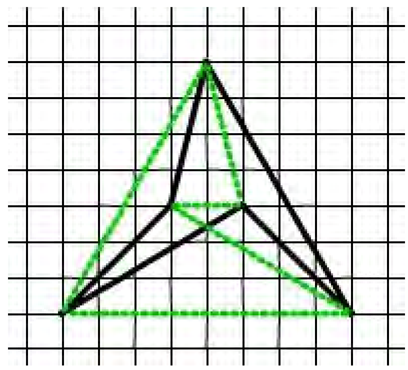


Рис. 6

Отметим, что меньше, чем по пять вершин, такие многоугольники иметь не могут. Действительно, пусть вершин четыре, тогда занумеруем вершины первого многоугольника в порядке «обхода»: 1-2-3-4-1. Во втором многоугольнике у каждой вершины должны смениться оба «соседа», но это невозможно, так как в первом многоугольнике для каждой вершины существует только одна, не соседняя с ней (например с вершиной 2 не соседствует только вершина 4).

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Докажите, что ни при каких натуральных значениях x и y число $x^8 - x^7y + x^6y^2 - ... - xy^7 + y^8$ не является простым.

Разложим данное выражение на множители. Это можно сделать различными способами.

<u>Первый способ</u>. Умножим и разделим данное число на положительное число $x + y$, тогда $x^8 - x^7y + x^6y^2 - ... - xy^7 + y^8 = \frac{(x+y)(x^8 - x^7y + ... - xy^7 + y^8)}{x+y} = \frac{x^9 + y^9}{x+y} = \frac{(x^3+y^3)(x^6 - x^3y^3 + y^6)}{x+y} = (x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$.

<u>Второй способ</u>. Воспользуемся группировкой: $x^8 - x^7y + x^6y^2 - ... - xy^7 + y^8 = (x^8 - x^7y + x^6y^2) - (x^5y^3 - x^4y^4 + x^3y^5) + (x^2y^6 - xy^7 + y^8) = x^6(x^2 - xy + y^2) - x^3y^3(x^2 - xy + y^2) + y^6(x^2 - xy + y^2) = (x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$.

Полученные множители имеют одинаковый вид (неполный квадрат суммы). Но $a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab \geq 1$, если a и b – натуральные числа. Равенство возможно только при $x = y = 1$, тогда данное число равно 1, то есть не является простым. В остальных случаях каждый множитель больше 1, поэтому, данное число является составным.

5.2. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Луч с началом в точке A, параллельный OB, пересекает окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E. Прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите, что $OK = KB$.

Пусть $\angle ACE = \alpha$, тогда $\angle OAK = \alpha$ (угол между касательной и хордой, см. рис. 7), и $\angle EOK = \alpha$ ($CA \parallel OB$). Следовательно, треугольники AOK и OEK подобны, значит, $\frac{OK}{EK} = \frac{AK}{OK} \Leftrightarrow OK^2 = AK \cdot EK$.

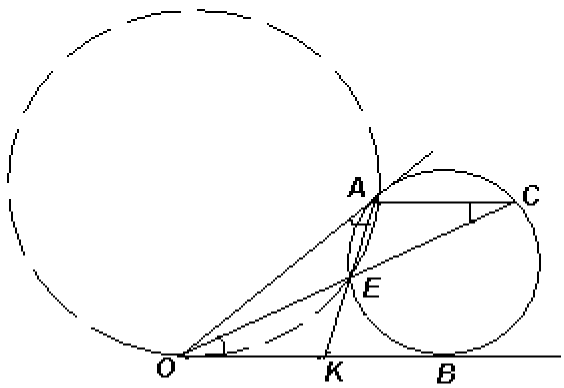


Рис. 7

С другой стороны, по свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки, $KB^2 = KA \cdot KE$. Таким образом, $OK = KB$, что и требовалось.

Равенство $OK^2 = AK \cdot EK$ можно также получить из других соображений. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника AEO и касательную к ней в точке O (см. рис. 7). Тогда из равенства углов OAE и EOK следует, что эта касательная совпадает с прямой OB. Применив для построенной окружности и точки K свойство касательной и секущей, получим требуемое равенство.

5.3. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 247. Какой номер имеет седьмой дом от угла?

Ответ: 19.

Пусть первый от угла дом квартала имеет номер p, а количество домов на одной стороне квартала равно k. Тогда, последовательность p, $p + 2$, $p + 4$, ..., $p + 2(k - 1)$ номеров этих домов является арифметической прогрессией. Сумма первых k членов этой прогрессии равна $\frac{p + p + 2k - 2}{2} \cdot k = (p + k - 1)k$.

По условию получим уравнение: $(p + k - 1)k = 247$. Разложение на простые множители числа 247 имеет вид $247 = 13 \cdot 19$. Так как $p \geq 1$, то $p + k - 1 \geq k$, значит, $p + k - 1 = 19$, а $k = 13$, то есть $p = 7$. Следовательно, на одной стороне квартала 13 домов, а их нумерация начинается с числа 7. Таким образом, седьмой дом (от любого угла) имеет номер 19.