10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Найдите значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$, если $x^2 + y^2 = 6xy$ и $x \neq y$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

Первый способ. Так как $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2} = \frac{8xy}{4xy} = 2$, то $\frac{x+y}{x-y} = \pm\sqrt{2}$.

Второй способ. Пусть $\frac{y}{x} = t$ ($x \neq 0$, так как в противном случае из равенства в условии следует, что $y = 0$). Тогда, разделив все члены исходного равенства на x^2, получим, что $t^2 - 6t + 1 = 0$. Корни этого уравнения: $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Тогда $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+t}{1-t} = \pm\sqrt{2}$.

1.2. При показе итогов регаты изображение вылезло за пределы квадратного экрана на 20 см (с каждой стороны). На какое наименьшее расстояние (выраженное целым количеством сантиметров) надо приблизить экран к проектору, чтобы изображение поместилось на экран полностью, если «угол зрения» проектора равен 60°?

Ответ: на 35 см.

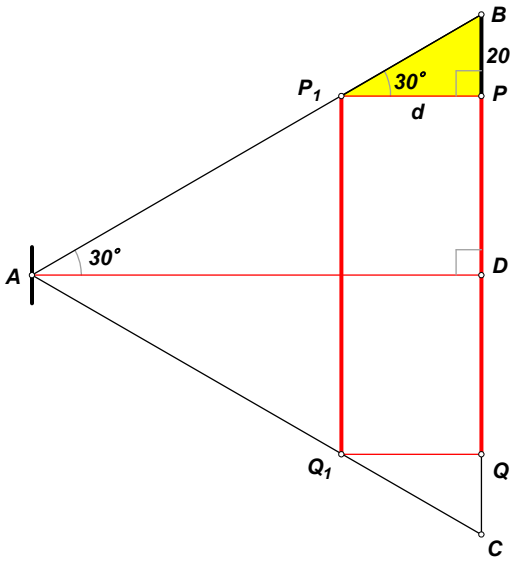


Рис. 1

Посмотрев на ситуацию «в профиль», получим следующую картинку (см. рис. 1), где A – проектор, PQ и P_1Q_1 – начальное и искомое положения экрана соответственно.

Рассмотрим прямоугольный треугольник P_1PB: $BP = 20$ см; $\angle BP_1P = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$. Изображение полностью поместится на экран, если $d = PP_1 = \frac{PB}{tg30^\circ} = 20\sqrt{3}$.

Оценим полученное число, исходя из условия задачи. Так как $\sqrt{3} > 1{,}7$, то $20\sqrt{3} > 34$. При этом $20\sqrt{3} < 35$, поскольку $(20\sqrt{3})^2 = 1200 < 35^2 = 1225$.

1.3. Кузнечик прыгает по координатной прямой. Сначала он прыгает из точки с координатой 0 в точку с координатой 1, а длина каждого следующего прыжка вдвое больше предыдущего. Сможет ли он вернуться в исходную точку, двигаясь подобным образом? (Направление каждого прыжка: влево или вправо – не зависит от направления предыдущего прыжка.)

Ответ: нет, не сможет.

Заметим, что длины прыжков кузнечика являются последовательными степенями двойки: 1, 2, 4, 8, … . Далее можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Поскольку длина первого прыжка нечетна, а остальные длины прыжков – четные, то и сумма длин всех прыжков нечетна. А для того, чтобы вернуться в начальную точку, кузнечику нужно преодолеть путь четной длины.

Второй способ. Заметим, что в любой момент длина последнего прыжка больше, чем сумма длин всех предыдущих прыжков: $2^n > 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Это означает, что после $n - 1$ прыжков кузнечик не может оказаться от начала координат на расстоянии 2^n.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

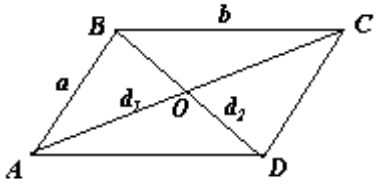
2.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$.

Ответ: (1; 1); (–1; 1).

$\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0{,}5, \\ x^4 = 4y^2 - 4y + 1, \\ y^4 + 4y^2 - 4y - 1 = 0 \end{cases}$. Так как $y = 1$ является одним из решений последнего уравнения, то, разделив многочлен в левой части этого уравнения на $(y - 1)$, получим уравнение: $y^3 + y^2 + 5y + 1 = 0$. При $y \geq 0{,}5$ левая часть полученного уравнения принимает только положительные значения, поэтому других корней, удовлетворяющих данной системе уравнений, оно не имеет. Если $y = 1$, то $x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

2.2. Найдите наибольший периметр параллелограмма, диагонали которого 6 см и 8 см.

Ответ: 20 см.



Докажем, что ***среди всех параллелограммов с данными длинами диагоналей наибольший периметр имеет ромб***.

Действительно, пусть a и b – длины соседних сторон параллелограмма, а d_1 и d_2 – длины его диагоналей (см. рис. 2). Тогда периметр параллелограмма: $P = 2(a + b)$. Рис. 2

Из равенства $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$, выражающего теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма, следует, что у всех параллелограммов с данными диагоналями сумма квадратов сторон есть величина постоянная.

По неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow 2(a+b) \leq 2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$, причем равенство достигается т. и т. т., когда $a = b$. Значит, параллелограмм с наибольшим периметром является ромбом.

Находим сторону этого ромба: $a = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{4}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (см).

Отметим, что вместо теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма можно было дважды использовать теорему косинусов (например, для треугольников AOB и BOC), выразив стороны a и b через длины диагоналей и угол φ между диагоналями (см. рис. 2). Далее используется то же самое неравенство.

2.3. В футбольном турнире участвовало 5 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу (выигрыш – 3 очка, ничья – 1

	1	2	3	4	5	О
1	■	3	3	0	0	**6**
2	0	■	1	3	1	**5**
3	0	1	■	1	3	**5**
4	3	0	1	■	1	**5**
5	3	1	0	1	■	**5**

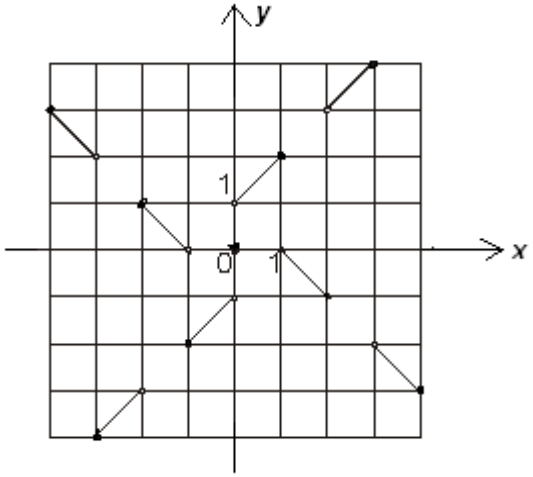
очко, проигрыш – 0). Все участники, кроме победителя, набрали очков поровну. Каков наименьший возможный отрыв команды-победителя?

Ответ: 1 очко.

Меньшим, чем 1 очко, разрыв быть не может. Приведем пример турнирной таблицы, удовлетворяющей условию, где требуемый разрыв составляет 1 очко:

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Изобразите такой график функции, определенной на отрезке [–4; 4], что при повороте на 90° с центром в начале координат он переходит в себя.



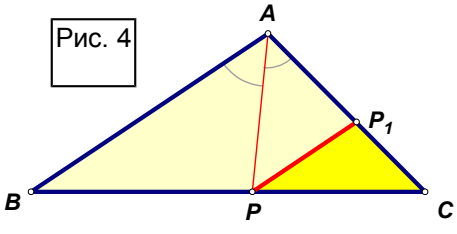
Ответ: см., например, рис. 3.

Поясним, что в этом примере искомая функция f – нечетная и f(0) = 0; f(1) = 2; f(2) = –1; f(3) = 4; f(4) = –3.

Рис. 3

3.2. Биссектрисы углов треугольника *ABC* пересекают стороны *BC*, *CA* и *AB* в точках *P*, *Q* и *R* соответственно. P_1 – точка пересечения прямой, проходящей через точку *P* параллельно *AB*, со стороной *CA*. Аналогично определяются точки Q_1 и R_1. Найдите сумму $\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{QQ_1}+\frac{1}{RR_1}$, если длины сторон исходного треугольника равны *a*, *b* и *c*.

Рис. 4



Ответ: $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Из подобия треугольников *ABC* и P_1PC следует, что $\frac{PP_1}{AB}=\frac{PC}{BC}$, то есть $PP_1=\frac{c}{a}PC$ (см. рис. 4).

Выразим *PC* через стороны треугольника *ABC*. Для этого используем свойство биссектрисы треугольника: $\frac{PC}{PB}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$ и равенство $PB+PC=BC=a$. Из системы уравнений $\begin{cases}\frac{PC}{PB}=\frac{b}{c}\\ PB+PC=a\end{cases}$ получим, что $PC=\frac{ab}{b+c}$. Следовательно, $\frac{1}{PP_1}=\frac{a}{c\cdot PC}=\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Аналогично находим, что $\frac{1}{QQ_1}=\frac{c+a}{ac}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{RR_1}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Тогда искомая сумма: $\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{QQ_1}+\frac{1}{RR_1}$ = $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

3.3. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде $\frac{mn+1}{m+n}$, где *m* и *n* – также натуральные числа.

Ответ: в указанном виде можно представить любое натуральное число.

Пусть *m* = *n* + 2, где *n* – некоторое натуральное число. Тогда $\frac{mn+1}{m+n}$ = $\frac{(n+2)n+1}{n+2+n}$ = $\frac{(n+1)^2}{2(n+1)}$ = $\frac{n+1}{2}$. Следовательно, для требуемого представления произвольного натурального числа *x* достаточно, чтобы *x* = $\frac{n+1}{2}$. Тогда при *n* = 2*x* – 1, *m* = 2*x* + 1 получим, что $\frac{mn+1}{m+n}$ = x.

Отметим, что для некоторых натуральных чисел возможны и другие способы представления, например: 1 = $\frac{1\cdot1+1}{1+1}$.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Пусть a_n – целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите все такие натуральные *n*, что $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=64$.

Ответ: *n* = 1056.

Первый способ. Обратим внимание на следующую закономерность:

1) $a_1=a_2=1$, то есть $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=2$,

2) $a_3=a_4=a_5=a_6=2$, то есть $\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=2$, и так далее.

Докажем указанную закономерность, обосновав ее сначала для уже рассмотренных частных случаев:

1) $a_1=a_2=1$, поскольку $|\sqrt{2}-1|<|\sqrt{2}-2|$, а $|\sqrt{3}-1|>|\sqrt{3}-2|$.

2) $a_3=a_4=a_5=a_6=2$, поскольку $|\sqrt{6}-2|<|\sqrt{6}-3|$, а $|\sqrt{7}-3|>|\sqrt{7}-2|$.

В общем виде: докажем, что для любых натуральных *n* $a_{(n-1)n+1}=a_{(n-1)n+2}=\ldots=a_{(n-1)n+2n}=n$.

Поскольку $(n-1)n+2n=n(n+1)$, то достаточно показать, что выполняется система неравенств: $\begin{cases}\left|\sqrt{n(n+1)}-n\right|<\left|\sqrt{n(n+1)}-(n+1)\right| \\ \left|\sqrt{n(n+1)+1}-n\right|>\left|\sqrt{n(n+1)+1}-(n+1)\right|\end{cases}$. Раскрывая модули и преобразуя, получим равносильную систему неравенств: $\begin{cases}2\sqrt{n(n+1)}<2n+1, \\ 2\sqrt{n(n+1)+1}>2n+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4n^2+4n<4n^2+4n+1, \\ 4n^2+4n+4>4n^2+4n+1.\end{cases}$

Неравенства в последней системе – очевидны, поэтому утверждение доказано.

Таким образом, если последовательно брать группы из двух, четырех, шести и так далее дробей, то сумма дробей в каждой группе будет равна 2. Значит, для получения суммы, равной 64, необходимо взять 32 группы, то есть 2 + 4 + 6 + ... + 64 = 33·32 = 1056 слагаемых.

Второй способ. Рассмотрим несколько первых членов натурального ряда и заметим, что в этом ряду между квадратами числами m^2 и $(m + 1)^2$ стоит ровно $2m$ чисел. Действительно, $(m + 1)^2 – m^2 = 2m + 1$.

Для первых m чисел этого промежутка $a_n = m$, а для следующих m чисел $a_n = m + 1$. Действительно, $m^2 + m = (m + 0{,}5)^2 – 0.25$, то есть $\sqrt{m^2+m}<m+0{,}5$, а $m^2 + m + 1 = (m + 0{,}5)^2 + 0.75$, то есть $\sqrt{m^2+m}>m+0{,}5$.

Разобьем теперь натуральный ряд на интервалы постоянства a_n и найдем их длины. Слева от числа вида $(m + 1)^2$ будет m чисел, для которых $a_n = m + 1$, а справа будет $m + 1$ таких чисел. Всего чисел, для которых $a_n = m + 1$, будет $m + 1 + (m + 1) = 2(m + 1)$. Следовательно, сумма обратных величин для этих чисел равна $\frac{1}{m+1}\cdot 2(m+1) = 2$.

По условию, сумма чисел в первых k интервалах равна 64, следовательно, $k = 32$. Искомое число n соответствует последнему числу последнего интервала, то есть $n = k^2 + k = k(k + 1) = 32\cdot 33 = 1056$.

Поскольку при увеличении количества членов их сумма увеличивается, то найденное решение – единственное.

4.2. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что угол MCN равен 45° (точка M лежит между A и N). Докажите, что $AM^2 + BN^2 = MN^2$.

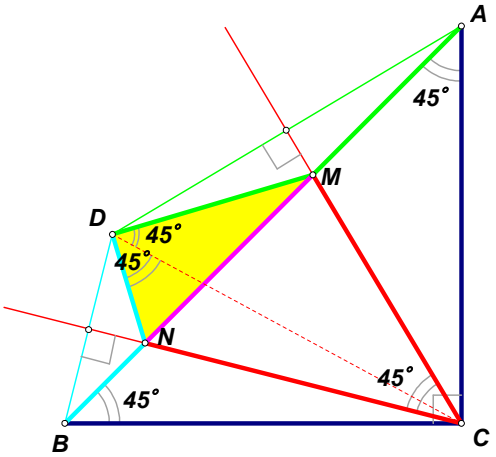


Рис. 5а

Первый способ. Мысленно «перегнем чертеж» по лучам CM и CN и докажем, что в этом случае точки A и B «попадут» в одну и ту же точку D (см. рис. 5а).

Действительно, $\angle ACM + \angle BCN = 45° = \angle MCN$, то есть лучи CA и CB при перегибании совпадают, и $CA = CD = CB$.

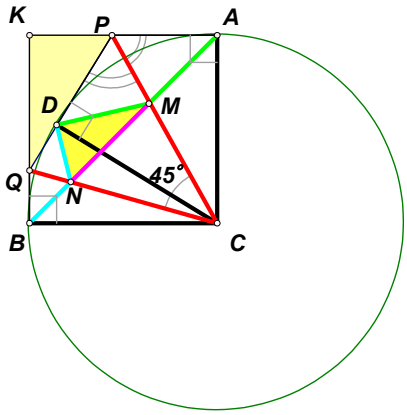
Следовательно, $\angle MDN = \angle MDC + \angle NDC = \angle MAC + \angle NBC = 90°$. Из прямоугольного треугольника *MDN* по теореме Пифагора получим: $MN^2 = MD^2 + ND^2 = AM^2 + BN^2$.

Основную часть этого способа решения можно более строго изложить, например, так. Рассмотрим $R_C^{90^0}$ *– поворот на 90 градусов (по часовой стрелке) с центром в точке C. Тогда* $R_C^{90^0}(B) = A$ *(см. рис. 5а). С другой стороны, так как угол между прямыми CM и CN равен 45° (вдвое меньше, чем 90°), то рассмотренный поворот можно представить в виде композиции двух осевых симметрий:* $R_C^{90^0} = S_{CM} \circ S_{CN}$.

Пусть $D = S_{CN}(B)$ *– образ точки B при симметрии относительно прямой CN. Тогда* $S_{CM}(D) = S_{CM} \circ S_{CN}(B) = R_C^{90^0}(B) = A$, *то есть точки A и D симметричны относительно прямой CM.*

Так как осевая симметрия сохраняет расстояния между точками и углы между прямыми, то DN = BN, DM = AM, $\angle NDC = \angle NBC = 45°$, $\angle MDC = \angle MAC = 45°$.

Второй способ. Достроим треугольник *ABC* до квадрата *KACB,* обозначив точки пересечения лучей *CM* и *CN* со сторонами квадрата через *P* и *Q* (см. рис. 5б). Докажем, что точка *C* является центром вневписанной окружности треугольника *PKQ*, касающейся стороны *PQ*.



Действительно, выполняются два условия: 1) точка *C* лежит на биссектрисе угла *PKQ*; 2) угол между биссектрисами внешних углов *P* и *Q* треугольника *PKQ* равен: $180^\circ - \frac{1}{2}(\angle APQ + \angle BQP) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KPQ + 180^\circ - \angle KQP) = 45° = \angle PCQ$.

Рис. 5б

Проведем перпендикуляр *CD* к отрезку *PQ*, являющийся радиусом вневписанной окружности (наряду с отрезками *CA* и *CB*). Так как *CA = CD = CB*, то $\Delta CAP = \Delta CDP$ и $\Delta CBQ = \Delta CDQ$ (в обоих случаях прямоугольные треугольники равны по катету и гипотенузе). Следовательно, *DM = AM* и *DN = BN.* Кроме того, $\angle MDC = \angle MAC = 45°$ и $\angle NDC = \angle NBC = 45°$. Таким образом, треугольник *MDN* – прямоугольный, откуда и следует требуемое утверждение.

4.3. Дано 51 различное натуральное число, меньшее 100. Докажите, что из них можно выбрать шесть таких чисел, что никакие два из выбранных не имеют одинаковых цифр ни в одном разряде.

По принципу Дирихле в первой сотне чисел найдется десяток, в который попадет хотя бы шесть из данных чисел. Останется не менее 41 числа, поэтому среди других десятков найдется тот, в который попало не менее пяти из данных чисел. Рассуждая аналогичным образом, получим, что еще есть десяток, в который попало не менее четырех данных чисел, еще есть десяток, в который попало не менее трех чисел, еще есть десяток, содержащий хотя бы два и еще есть десяток, содержащий хотя бы одно из данных чисел. Таких десятков, которые мы назовем «отмеченными», получается не менее шести.

У чисел внутри одного десятка в разряде единиц стоят различные цифры, поэтому искомый набор чисел можно получить так: берем число из последнего «отмеченного»

десятка, затем берем число из предпоследнего «отмеченного» десятка с другой цифрой единиц и так далее. Выбранные шесть чисел не могут иметь одинаковых цифр ни в одном разряде.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Числа *a*, *b*, *x* è *y* удовлетворяют равенствам: $(a + b)(x + y) = 1$ и $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1$. Докажите, что $ax + by \geq 0$.

Первый способ («алгебраический»). Перепишем условие задачи в виде: $\begin{cases} ax+bx+ay+by=1, \\ (ax)^2+(bx)^2+(ay)^2+(by)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ax+by)+(bx+ay)=1, \\ (ax-by)^2+(bx+ay)^2=1. \end{cases}$ Из второго равенства следует, что $(bx+ay)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |bx+ay| \leq 1$, тогда из первого равенства: $ax + by = 1 - (bx + ay) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Второй способ («векторный»). Из первого равенства в условии следует, что $ax + by = 1 - (bx + ay)$, поэтому достаточно доказать, что $bx + ay \leq 1$.

Пусть в декартовой системе координат $\overline{c}(b; a)$, $\overline{d}(x; y)$. Тогда $|\overline{c}| = \sqrt{b^2 + a^2}$, $|\overline{d}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из второго равенства в условии получим, что $|\overline{c}| \cdot |\overline{d}| = 1$. Следовательно, $bx + ay = \overline{c} \cdot \overline{d} = |\overline{c}| \cdot |\overline{d}| \cdot \cos \angle(\overline{c}; \overline{d}) \leq 1$, что и требовалось.

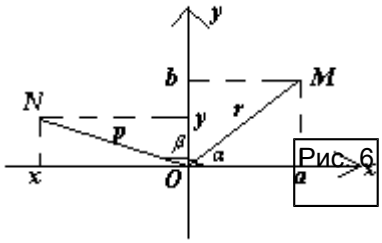


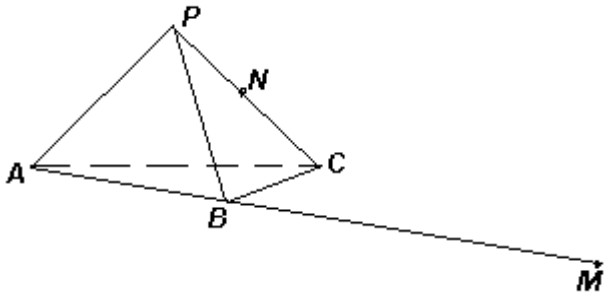
Рис. 6

Третий способ («тригонометрический»). Рассмотрим точки $M(a; b)$ и $N(x; y)$ в декартовой системе координат (см. рис. 6). Из первого равенства в условии следует, что ни одна из выбранных точек не совпадает с началом координат. Пусть $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, $p = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Тогда $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$ и $x = p\cos\beta$, $y = p\sin\beta$, где α и β – углы, которые образуют с координатным лучом *Ox* лучи *OM* и *ON* соответственно. Тогда $\begin{cases} pr(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta+\sin\beta)=1, \\ r^2p^2=1 \end{cases}$. При этом требуется доказать, что $ax + by = pr(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = pr\cos(\alpha - \beta) \geq 0$.

Из второго уравнения системы получим, что $pr = 1$, тогда $(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta + \sin\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 1$. Следовательно, $\cos(\alpha - \beta) = 1 - \sin(\alpha + \beta) \geq 0$. Таким образом, $pr\cos(\alpha - \beta) \geq 0$, что и требовалось.

Отметим, что этот способ решения фактически использует полярную систему координат.

5.2. На столе стоит правильная треугольная пирамида *PABC* (сделанная из стекла), все ребра которой равны 1 (см. рис.). Муравей ползет из точки *M*, лежащей на луче *AB* на расстоянии 2 от точки *B*, в точку *N* – середину ребра *PC*. Найдите длину его кратчайшего пути.



Ответ: $\frac{\sqrt{31}}{2}$.

Рассмотрим произвольный путь муравья из точки *M* в точку *N* по столу и по грани *PBC* пирамиды (см. рис. 7). Этот маршрут должен пройти через некоторую точку *Q* ребра *BC*.

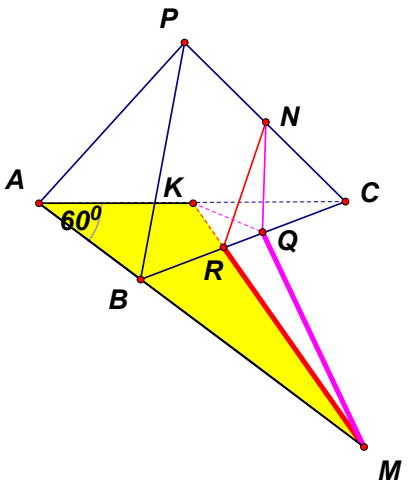


Рис. 7

Пусть *K* – середина отрезка *AC*, тогда *QN* = *QK* (соответствующие отрезки в равных треугольниках *PBC* и *ABC*). Поэтому расстояние, пройденное муравьем, равно: *MQ* + *QN* = *MQ* + *QK* ≥ *MK* (неравенство треугольника). Равенство достигается тогда и только тогда, когда точка *Q* совпадает с точкой *R* пересечения *MK* и *BC*.

Таким образом, длина кратчайшего пути муравья равна длине отрезка *MK*, которую можно вычислить, например, по теореме косинусов из треугольника *AMK*:

$MK^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cdot \cos 60^\circ = 9 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{4}$; $MK = \frac{\sqrt{31}}{2}$.

5.3. Найдите все целые решения уравнения $k(k+1) = n^3$.

Ответ: $k = -1$, $n = 0$ или $k = 0$, $n = 1$.

Докажем, что каждое из чисел *k* и *k* + 1 является кубом целого числа. Действительно, пусть *p* – произвольный простой делитель числа *n*, тогда в разложение числа n^3 на простые множители он входит с показателем степени α, кратным трем. Последовательные целые числа *k* и *k* + 1 являются взаимно простыми, то есть p^α целиком содержится либо в разложении на простые множители числа *k*, либо в аналогичном разложении числа *k* + 1. Следовательно, каждое из рассматриваемых чисел является произведением простых множителей с показателями степеней, делящимися на 3. Таким образом, каждое из чисел *k* и *k* + 1 является кубом целого числа.

Существует только две пары кубов целых чисел, отличающихся на 1: (–1; 0) и (0; 1).