

### Турнир Архимеда.

#### Московская математическая регата 10 классов.

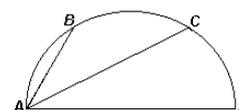
21 апреля 2001 года состоялось очередное соревнование Турнира Архимеда текущего учебного года (календарь математических соревнований ежемесячно публикуется на страницах приложения; в электронном виде – см. на сервере МЦНМО по адресу <http://www.mcsme.ru/olympiads>) – математическая регата 10-х классов, которая, по традиции, прошла в лицее МИФИ №1511. Основные трудности организации взяли на себя учителя математики лицея А.В. Иванищук и И.В. Ширстова, которым активно помогали старшеклассники и студенты-выпускники. В соревнованиях приняло участие 26 команд из четырнадцати школ. Более широко, чем на предыдущих регатах, были представлены школы Подмоскovie: среди участвовавших были команды из Боровска, Долгопрудного, Ступино и Фрязино.

Победу в соревновании одержала команда школы №218, призовые места также заняли: команда школы №57, две команды гимназии №1514, команды лицеев №1523 и №1511. Полные итоги состоявшейся регаты опубликованы на сервере МЦНМО. Там же можно найти и материалы прошедших регат текущего учебного года, которые также публиковались на страницах приложения «Математика». Подробно о том как проводятся математические регаты и материалы регат предыдущих лет – см. в сборнике «Московские математические регаты» (составитель – А.Д. Блинков, МЦНМО, 2001).

В подготовке заданий для этой регаты (помимо авторов статьи) приняли участие учителя московских школ: А.В. Алферов, Ю.А. Блинков, А.З. Гурвиц, А.В. Иванищук, К.П. Кочетков. Наряду с задачами, составленными специально для этой регаты и задачами, являющимися математическим фольклором, были использованы несколько задач Краснодарского математического фестиваля, проходившего осенью 2000 года в г. Майкопе. В работе жюри, помимо ряда уже названных учителей, участвовали также З.И. Боташева, В.В. Вакулюк, А.В. Губин, Г.А. Захарова, С.Н. Игнатова, Е.Ф. Шершнеv.

#### Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения  $a\sin^2x + b\cos^2x$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа.



1.2. Точки  $B$  и  $C$  делят полуокружность с диаметром  $AD$  на три равные части (см. рис.). Найдите площадь фигуры  $CAB$ , ограниченной хордами  $AB$  и  $AC$  и дугой  $BC$ , если радиус полуокружности равен  $R$ .

1.3. Пусть  $S(x)$  – сумма цифр натурального числа  $x$ . Решите уравнение:  $x + S(x) = 2001$ .

#### Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Приведенный квадратный трехчлен  $P(x)$  имеет положительный дискриминант  $D$ . Сколько корней имеет уравнение  $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$ ?

2.2. В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AE$  равна отрезку  $EC$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AC = 2AB$ .

2.3. Существуют ли 6 последовательных натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное первых трех из них больше, чем наименьшее общее кратное трех следующих?

#### Третий тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

3.1. Найдите все значения  $a$ , для которых уравнение  $ax^2 - 2x + 2a^2 - 4 = 0$  имеет только целые корни.

3.2.  $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Точка  $D$  лежит на стороне  $AC$ , причем отрезок  $BD$  перпендикулярен прямой  $AO$ . Найдите длину отрезка  $AD$ , если  $AC = b$ ;  $AB = c$ .

3.3. Дана кучка из 2001 камня. Ее требуется разбить на 2001 кучку по одному камню в каждой, причем за один «шаг» разрешается разбивать любую из уже имеющихся кучек

камней на две непустые кучки. На каждом «шаге»: если количество камней в двух кучках, получающихся при разбиении, различно, то оплачивается штраф – 1 рубль, если же оно одинаково, то штраф не платится. Какой наименьший штраф придется заплатить для того, чтобы осуществить указанное разбиение?

**Четвертый тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).**

**4.1.** Функция  $f(x)$  при всех действительных  $x$  удовлетворяет уравнению  $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$ . Какие значения может принимать  $f(-\sqrt{2})$ ?

**4.2.** Существуют ли четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ , не лежащие в одной плоскости, такие, что каждый из треугольников  $ABC, ABD, ACD$  и  $BCD$  является тупоугольным?

**4.3.** На плоскости задано конечное множество точек так, что для любых двух точек  $A$  и  $B$  из данного множества существует точка  $M$  из этого же множества такая, что  $\angle AMB = \alpha$ , где  $\alpha$  – фиксированное число. Найдите значение  $\alpha$ .

**Пятый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов).**

**5.1.** Сколько действительных корней имеет уравнение:  $x^{37} + x^8 + 1 = 0$ ?

**5.2.** Существуют ли на плоскости два выпуклых четырехугольника такие, что стороны каждого из них лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого?

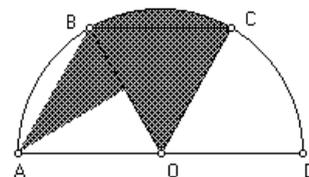
**5.3.** Кучку из  $N$  спичек произвольным образом разбили на две кучки, подсчитали количество спичек в каждой кучке и записали их произведение. Затем, одну из новых кучек опять разбили на две, опять подсчитали количество спичек в каждой и записали новое произведение. Этот процесс продолжали до тех пор, пока не получили  $N$  кучек по одной спичке в каждой. Тогда, все полученные произведения сложили и получили число  $S$ . Найдите  $S$ .

**Решения задач.**

**1.1. Первый способ.**  $g(x) = a \sin^2 x + b \cos^2 x = a \sin^2 x + a \cos^2 x + (b-a) \cos^2 x = a + (b-a) \cos^2 x$ . Так как  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ , то: при  $b \geq a$   $a \leq g(x) \leq b$ ; при  $b < a$   $b \leq g(x) \leq a$ .

**Второй способ.**  $g(x) = a \sin^2 x + b \cos^2 x = 0,5a(1 - \cos 2x) + 0,5b(1 + \cos 2x) = 0,5(a + b + (b - a) \cos 2x)$ . Так как  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ , то: при  $b \geq a$   $a \leq g(x) \leq b$ ; при  $b < a$   $b \leq g(x) \leq a$ .

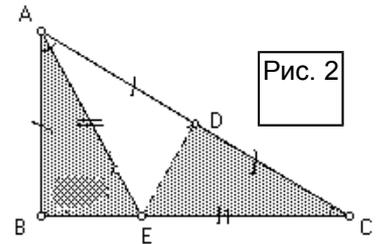
**Ответ:** если  $b \geq a$ , то  $b$  – наибольшее значение,  $a$  – наименьшее значение; если  $b < a$ , то  $a$  – наибольшее значение,  $b$  – наименьшее значение.



**1.2.** Из равенства соответствующих дуг следует, что  $AB = BC = CD$ , значит,  $BC \parallel AD$  (см. рис. 1). Следовательно,  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC}$ , значит, площадь искомой фигуры равна площади сектора  $OBC$  и составляет одну шестую часть от площади круга. **Ответ:**  $S = \frac{\pi R^2}{6}$ .

Рис. 1

**1.3.** Так как сумма цифр трехзначного числа не превосходит 27, то  $x \geq 2001 - 27$ , то есть, трехзначным (тем более, двузначным или однозначным) число  $x$  быть не может. Следовательно,  $x$  – четырехзначное число, первая цифра которого – 1, то есть,  $1 \leq S(x) \leq 28$ , значит,  $1973 \leq x \leq 2000$ . Дальнейший поиск решения осуществляется перебором, который можно облегчить *любым* из следующих соображений: 1) число 2001 кратно трем, а числа  $x$  и  $S(x)$  имеют одинаковые остатки от деления на 3, значит,  $x$  кратно трем. 2) Числа  $x$  и  $S(x)$  имеют одинаковые остатки от деления на 9, число 2001 при делении на 9 дает остаток 3, значит,  $x$  и  $S(x)$  при делении на 9 дают остаток 6, то есть,  $x = 9n + 3$ , где  $n \in N$ . Ответ: 1977.



**2.1.** Пусть квадратный трехчлен  $P(x) = x^2 + bx + c$  имеет дискриминант  $D = b^2 - 4c > 0$ . Тогда,  $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = (x^2 + bx + c) + ((x + \sqrt{D})^2 + b(x + \sqrt{D}) + c) = 2x^2 + 2(b + \sqrt{D})x + 2c + b\sqrt{D} + D$ . Упрощенный дискриминант нового квадратного трехчлена равен:  $(b + \sqrt{D})^2 - 4c - 2b\sqrt{D} - 2D = 0$ . Следовательно, данное уравнение имеет один корень. Ответ: один корень.

**2.2. Первый способ.** Из условия следует, что  $\angle ACE = \angle EAC = \angle EAB$  (см. рис. 2). Пусть  $D$  – середина  $AC$ . Тогда,  $ED$  – высота и медиана равнобедренного треугольника  $AEC$ .  $\triangle ABE = \triangle ADE$  (по двум сторонам и углу между ними), следовательно,  $\angle ABE = \angle ADE = 90^\circ$ , то есть,  $\triangle ABC$  – прямоугольный. Так как  $AB = 0,5AC$ , то  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ .

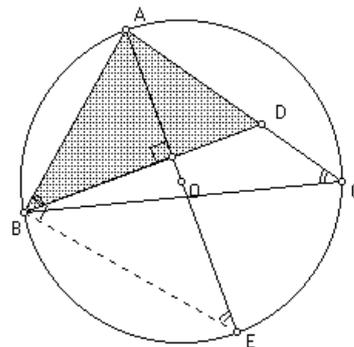
**Второй способ.** Пусть  $\angle ACE = \angle EAC = \angle EAB = \gamma$  (см. рис.). Тогда,  $\angle ABC = 180^\circ - 3\gamma$ . В треугольнике  $ABC$  по теореме синусов:  $\frac{AC}{\sin(180^\circ - 3\gamma)} = \frac{AB}{\sin \gamma}$ . Так как  $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{1}$ , то  $\sin 3\gamma = 2 \sin \gamma$ . Воспользуемся формулой тройного аргумента, и учтем, что искомый угол – острый:  $3 \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma = 2 \sin \gamma \Rightarrow \sin^2 \gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 30^\circ$ . Ответ:  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ .

*Возможны также другие аналитические решения, использующие свойство биссектрисы треугольника и подобие треугольников  $BAE$  и  $BCA$ .*

**2.3. Ответ:** существуют. Рассмотрим числа:  $n - 2$ ;  $n - 1$ ;  $n$ ;  $n + 1$ ;  $n + 2$ ;  $n + 3$ . Для того, чтобы описанная ситуация была возможна, необходимо, чтобы первые три числа были попарно взаимно простыми, а следующие три числа – нет. Так как соседние натуральные числа – взаимно простые, то общий делитель должен быть у чисел  $n + 1$  и  $n + 3$ , причем он может быть равен только двум, так как при делении на другие натуральные числа  $n + 1$  и  $n + 3$  имеют различные остатки. Значит, эти числа – четные, то есть, искомая последовательность должна начинаться с нечетного числа. Исходя из этих соображений, искомые числа можно подобрать, в частности, «наименьшей» среди таких последовательностей будет: 11; 12; 13; 14; 15; 16. (НОК (11; 12; 13) =  $11 \times 2 \times 3 = 1716$ ; НОК (14; 15; 16) =  $2 \times 7 \times 8 \times 15 = 1680$ )

Если НОК ( $n - 2$ ;  $n - 1$ ;  $n$ ) =  $(n - 2) \times (n - 1) \times n$ ; НОК ( $n + 1$ ;  $n + 2$ ;  $n + 3$ ) =  $\frac{1}{2} (n + 1) \times (n + 2) \times (n + 3)$ , то все искомые значения  $n$  являются решениями неравенства  $(n - 2) \times (n - 1) \times n > \frac{1}{2} (n + 1) \times (n + 2) \times (n + 3)$ .

**3.1.** 1) При  $a = 0$  данное уравнение имеет единственное решение:  $x = -2$ , которое является целым. 2) При  $a \neq 0$  уравнение является квадратным. Если  $\frac{D}{4} = 1 - 2a^3 + 4a \geq 0$ , то оно имеет корни  $x_1$  и  $x_2$  такие, что:  $x_1 + x_2 = \frac{2}{a}$  и  $x_1 \cdot x_2 = 2a - \frac{4}{a}$ . Если числа  $x_1$  и  $x_2$  – целые, то целыми являются также числа  $\frac{2}{a}$  и  $2a - \frac{4}{a}$ . Если число  $\frac{2}{a}$  – целое, то число  $\frac{4}{a}$  – также целое, значит, целым является и число  $2a$ . Так как  $\frac{2}{a} \cdot 2a = 4$ , то  $2a$  может принимать следующие значения:  $\pm 4$ ;  $\pm 2$  или  $\pm 1$ , то есть,  $a = \pm 0,5$  или  $a = \pm 1$  или  $a = \pm 2$ . При  $a = 2$ ,  $a = -1$  и  $a = -0,5$  данное уравнение не имеет решений ( $\frac{D}{4} < 0$ ). При  $a = 1$  и  $a = 0,5$  значения  $\frac{D}{4}$  равны соответственно 3 и  $\frac{11}{4}$ , что не приводит к целым решениям. При  $a = -2$  уравнение имеет целые корни:  $-2$  и  $1$ . Ответ:  $a = -2$  или  $a = 0$ .



**3.2.** Проведем диаметр  $AE$  (см. рис. 3). Пусть,  $\angle ABD = \alpha$ . Тогда,  $\angle BAE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle BEA = \alpha$  ( $\angle ABE$  – вписанный и опирается на диаметр, значит,  $\angle ABE = 90^\circ$ ). Тогда,  $\angle ACB = \angle BEA = \alpha$ . (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Следовательно,  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADB$  – подобны (по двум углам). Значит,  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow c^2 = b \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{c^2}{b}$ . Ответ:  $AD = \frac{c^2}{b}$ .

Рис. 3

**3.3.** Из условия задачи следует, что кучку из  $2^k$  камней можно разбить на кучки по одному камню не подвергаясь штрафу ( $k$  – любое натуральное число). Следовательно, «оптимальная стратегия разбиения» состоит в том, что мы постепенно разбиваем исходную кучку камней на наименьшее возможное количество кучек, количество камней в которых является степенью числа 2. (Это соответствует переводу числа 2001 в «двоичную» систему исчисления.)  $2001 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 1$ . Данная сумма содержит 7 слагаемых, значит потребуются ровно 6 разбиений, за которые придется платить штраф. Остальные разбиения не повлекут за собой оплаты штрафа. Ответ: 6 рублей.

**4.1.** При  $x = -\sqrt{2}$  получим:  $2f(-\sqrt{2}) + f(1) = 1$ . Для того, чтобы найти  $f(1)$ , рассмотрим данное соотношение при  $x = 0$ ;  $\pm 1$ . Тогда,

$$\begin{cases} 2f(0) + f(-1) = 1, \\ 2f(1) + f(0) = 1, \\ 2f(-1) + f(0) = 1. \end{cases}$$
 Решая эту систему, получим:  $f(0) =$   
 $f(1) = f(-1) = 1/3$ . Значит,  $f(-\sqrt{2}) = 1/3$ . Ответ:  $1/3$ .

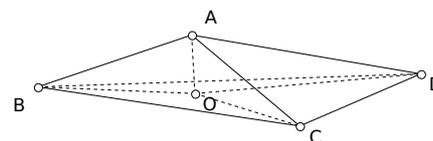
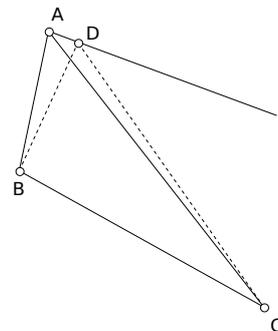


Рис. 4а

**4.2. Первый способ.** 1) Рассмотрим правильную пирамиду  $ABCD$  с основанием  $B CD$  такую, что плоские углы при вершине  $A$  – тупые (см. рис. 4а). Пусть  $AO$  – высота пирамиды, тогда, чем меньше длина  $AO$ , тем величины углов  $BAC$ ,  $CAD$  и  $DAB$  ближе к  $120^\circ$ .



2) Рассмотрим трехгранный угол, образованный лучами  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$ , у которого плоские углы при вершине  $A$  имеют величины, близкие к  $120^\circ$  (см. рис. 4б). Точки  $B$  и  $C$  выберем на сторонах угла произвольно, а точку  $D$  «устремим» к точке  $A$ . Тогда, величина  $\angle BDC$  будет мало отличаться от величины  $\angle BAC$ , то есть, этот угол также будет тупым. Таким образом, каждый из треугольников  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  и  $BCD$  будет тупоугольным.

Рис. 4б

**Второй способ.** Рассмотрим лучи  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  взяв точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  так, что  $AB = AC = a$ ;  $DB = DC = b$ ;  $BC = c$ ;  $AD = d$  (см. рис. 4б). Тогда,  $\triangle ABD = \triangle ACD$ . Используя следствие из теоремы косинусов для треугольника  $ABD$  запишем условие того, что  $\angle DAB$  – тупой:  $a^2 + d^2 < b^2$ . Аналогично, из треугольников  $CAB$  и  $CDB$ , получим, что  $2a^2 < c^2$  и  $2b^2 < c^2$ .

Преобразовав эти неравенства, получим систему: 
$$\begin{cases} d < \sqrt{b^2 - a^2} \\ c > a\sqrt{2} \\ c > b\sqrt{2} \end{cases}$$
. Осталось подобрать какое-

либо решение системы так, чтобы для каждого треугольника выполнялось неравенство треугольника, а тупые углы имели величину, меньшую  $120^\circ$ .

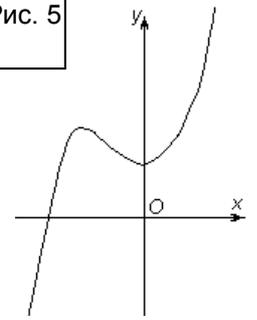
Один из возможных примеров:  $a = 9$ ;  $b = 10$ ;  $c = 15$ ;  $d = 4$ . Проверка:  $\cos \angle DAB = \cos \angle DAC = -\frac{1}{24} > -\frac{1}{2}$ ;  $\cos \angle BAC = -\frac{7}{30} > -\frac{1}{2}$ ;  $\cos \angle BDC = -\frac{1}{12} > -\frac{1}{2}$ , то есть, величина каждого из этих углов лежит в границах от  $90^\circ$  до  $120^\circ$ . Ответ: существуют.

**4.3.** Рассмотрим все отрезки, соединяющие точки данного множества. Так как количество точек – конечно, то и количество отрезков – конечно, значит, среди этих отрезков есть наибольший и наименьший. Пусть  $A_1B_1$  – наибольший отрезок, а  $A_2B_2$  – наименьший. Тогда, точка  $M_1$ , для которой  $\angle A_1M_1B_1 = \alpha$ , не может лежать на прямой  $A_1B_1$ , так как, в этом случае,  $\alpha = 180^\circ$ , но точки  $M_2$  такой, что  $\angle A_2M_2B_2 = 180^\circ$  в данном множестве нет. Аналогично, и точка  $M_2$ , для которой  $\angle A_2M_2B_2 = \alpha$ , не может лежать на прямой  $A_2B_2$ . Следовательно, точки  $A_1$ ,  $M_1$  и  $B_1$  являются вершинами треугольника, в котором  $\angle M_1$  – наибольший (следствие из теоремы синусов). Следовательно, его величина не меньше, чем  $60^\circ$ , то есть  $\alpha \geq 60^\circ$ . С другой стороны, в треугольнике  $A_2M_2B_2$   $\angle M_2$  – наименьший, значит,  $\alpha \leq 60^\circ$ . Следовательно,  $\alpha = 60^\circ$ . Одним из возможных и наиболее очевидных примеров конструкции, описанной в условии, является множество вершин любого правильного треугольника. Ответ:  $60^\circ$ .

Отметим, что в приведенном решении был дважды использован принцип «крайнего».

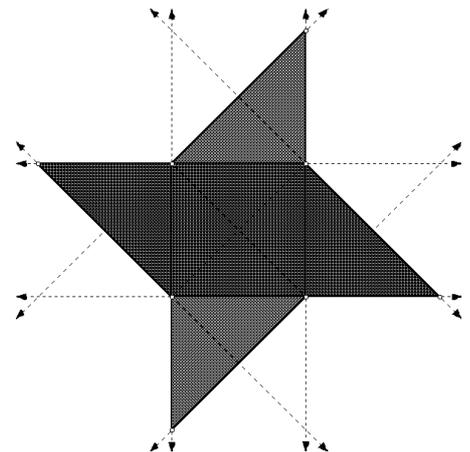
**5.1. Первый способ.** Сделаем замену переменных:  $x = 1/y$ . Получим уравнение:  $y^{37} + y^{29} + 1 = 0$ . Функция  $f(y) = y^{37} + y^{29} + 1$  является непрерывной и возрастающей (сумма непрерывных возрастающих функций), значит, уравнение  $f(y) = 0$  имеет не более одного корня. Так как эта функция принимает как положительные, так и отрицательные значения (например, при  $y = 0$  и  $y = -1$  соответственно), то уравнение  $f(y) = 0$  имеет корень, причем, отличный от нуля. Следовательно, и данное уравнение имеет один корень.

Рис. 5



**Второй способ.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^{37} + x^8 + 1$ . Исследуем ее на монотонность и экстремумы. Функция определена и непрерывна на  $R$ , ее производная  $f'(x) = 37x^{36} + 8x^7 = 37x^7 \left( x^{29} + \frac{8}{37} \right)$ .  $f'(x) = 0$  при  $x = 0$  или  $x = -\sqrt[29]{\frac{8}{37}} \approx -0,9$ . Рассмотрев знаки производной, получим, что на  $(-\mu; -\sqrt[29]{\frac{8}{37}}]$  и на  $[0; +\mu)$  функция возрастает, на  $[-\sqrt[29]{\frac{8}{37}}; 0]$  – убывает. Так как  $f(0) = 1$  – минимум, а  $f(-\sqrt[29]{\frac{8}{37}}) > 1$  – максимум функции, и, кроме того, функция может принимать отрицательные значения (например, при  $x = -2$ ), то значение 0 функция принимает только при одном значении аргумента, на  $(-\mu; -\sqrt[29]{\frac{8}{37}})$ . Эскиз графика – см. рис. 5.

Ответ: один корень.

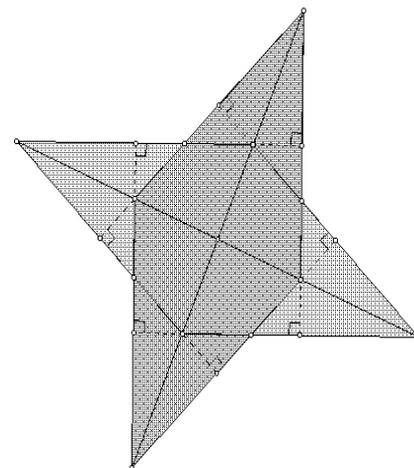


**5.2. Ответ:** существуют.

Один из возможных примеров таких четырехугольников – два равных между собой параллелограмма, которые получаются следующим построением: возьмем произвольный квадрат и «пристроим» к нему четыре прямоугольных равнобедренных треугольника (см. рис. 6). Выполнение условия задачи очевидным образом следует из построения, а также из свойств квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника.

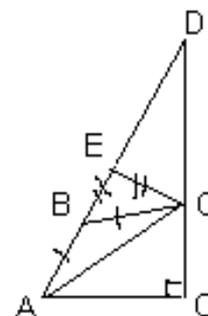
Другой возможный пример искомым четырехугольникам – два одинаковых ромба, острые углы которых равны по  $45^\circ$  (см. рис. 7а). Для построения таких четырехугольников возьмем правильный восьмиугольник (углы которого равны по  $135^\circ$ ), и продолжим некоторые его стороны до пересечения, как показано на рисунке.

Рис. 6



Для того, чтобы доказать, что построенные ромбы – искомые, рассмотрим центр  $O$  правильного восьмиугольника, являющийся также центром симметрии каждого из ромбов. *Первый способ.* Так как центральный угол, соответствующий стороне восьмиугольника равен  $45^\circ$ , то при повороте с центром  $O$  на  $90^\circ$  вершины восьмиугольника «переходят» друг в друга (через одну). Следовательно, «образом» любой из сторон восьмиугольника является также сторона восьмиугольника, значит, эти стороны лежат на перпендикулярных прямых, то есть стороны одного ромба лежат на прямых, перпендикулярных сторонам другого. Кроме того, при рассмотренном повороте, «образами» вершин одного из ромбов являются вершины другого ромба, «образами» сторон одного – стороны другого, значит «образами» середин сторон одного ромба являются середины

Рис. 7а



сторон другого. Следовательно, рассматриваемые перпендикуляры являются серединными, ч. т. д.

*Второй способ.* Рассмотрим любой из прямоугольных треугольников, на которые один из ромбов разбивается своими диагоналями. Пусть,  $AOD$  – такой треугольник,  $AB$  и  $BC$  – стороны восьмиугольника, тогда,  $CE$  – прямая, на которой лежат следующая сторона восьмиугольника и сторона другого ромба (см. рис. 7б).  $CE \perp AD$ , так как  $\angle EBC = \angle ECB = 45^\circ$  (внешние углы восьмиугольника). Кроме того,  $\angle DAC = 0,5\angle BAC = 22,5^\circ$ . Так как  $OA = OC$ , то  $\angle CAO = 45^\circ$ , значит,  $\angle ADC = 90^\circ - (\angle CAD + \angle DAC) = 22,5^\circ$ . Следовательно,  $AC = CD$ , то есть,  $CE$  – серединный перпендикуляр к  $AD$ , что и требовалось доказать.

Рис. 7б

**5.3. Первый способ.** Свяжем все спички попарно нитками. Каждый раз, разбивая одну из кучек на две, будем разрезать все нитки, соединяющие спички из разных кучек. Если мы разбиваем кучку из  $m + k$  спичек на кучки по  $m$  и  $k$  спичек, то разрезано будет  $m \cdot k$  ниток, то есть, в точности столько, какое число будет записано на этом шаге. Таким образом, сумма  $S$  всех записанных чисел равна общему количеству разрезанных ниток. Так как сначала

все спички были соединены попарно, то было использовано  $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$  ниток. По окончании процесса все нитки будут разрезаны, значит,  $S = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ .

*Второй способ.* Заметим, что  $m \cdot k = \frac{(m+k)^2 - (m^2 + k^2)}{2}$ . То есть, если на каком-то шаге мы разбиваем кучку из  $m + k$  спичек на кучки по  $m$  и  $k$  спичек, то вместо произведения  $m \cdot k$  можно записать такую дробь. Так как каждую кучку, в которой больше одной спички, мы обязательно разделим на две, то, записав сумму всех таких дробей, можно заметить, что все «промежуточные» числа взаимно уничтожатся. Значит, искомую сумму можно найти следующим образом: из квадрата количества спичек вначале вычесть сумму квадратов количеств спичек в конце ( $N$  слагаемых) и разделить на 2, то есть,  $S = \frac{N^2 - (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)}{2} = \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ .

*Третий способ.* То, что искомая сумма  $S$  не зависит от порядка выполнения операций и равна  $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$  можно доказать, используя метод математической индукции. При  $N = 1$  утверждение очевидно. Пусть оно верно при всех количествах спичек, меньших  $N$ . Первым шагом мы разбиваем кучку спичек на две кучки меньших размеров: по  $m$  и  $k$  спичек. Независимо от способов разбиения получившихся кучек, для каждой из них искомые суммы равны  $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$  и  $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$  соответственно (по предположению индукции). Тогда,  $S = mk + \frac{m \cdot (m-1)}{2} + \frac{k \cdot (k-1)}{2} = \frac{(2mk + m^2 + k^2) - (m+k)}{2} = \frac{(m+k)^2 - (m+k)}{2} = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ , ч. т. д.