9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Найдите все значения x, для которых $\sqrt{9-4x^2} \neq 0$.

Ответ: (–1,5; 1,5).

Значение данного квадратного корня отлично от нуля, если это выражение имеет смысл и подкоренное выражение не равно нулю, то есть если $9 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1{,}5 \Leftrightarrow -1{,}5 < x < 1{,}5$.

1.2. В треугольник ABC с прямым углом C и углом B, равным 30°, вписана окружность радиуса 1.

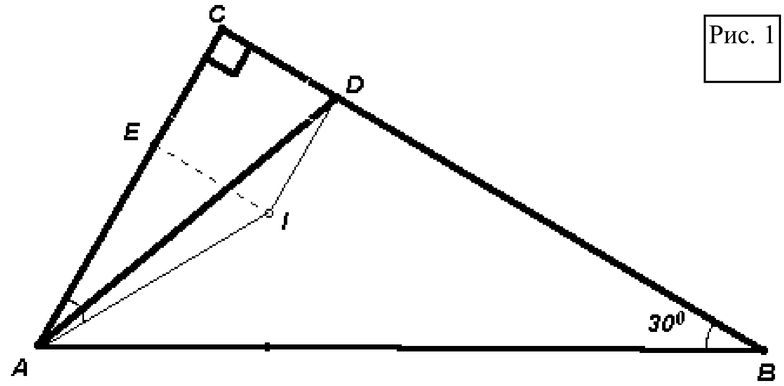


Рис. 1

Найдите расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной BC.

Ответ: $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Пусть I – центр вписанной окружности, D и E – точки касания этой окружности с катетами BC и AC соответственно (см. рис. 1). Четырехугольник $IECD$ – квадрат, так как все его углы прямые и $ID = IE$. Поэтому $CD = CE = r = 1$.

Первый способ. Проведем отрезок AI. В треугольнике AEI угол E – прямой, а $\angle EAI = 30°$ (так как AI – биссектриса угла CAB, равного 60°). Тогда $AE = \dfrac{r}{tg30^\circ} = \sqrt{3}$; $AC = AE + r = \sqrt{3} + 1$. Из прямоугольного треугольника ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 5 + 2\sqrt{3}$.

Второй способ. Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, можно вывести формулу $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, справедливую для любого прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c.

В нашем случае: пусть $AC = b$, тогда $BC = \dfrac{b}{tg30^\circ} = b\sqrt{3}$; $AB = 2b$. Подставив эти выражения в указанное выше равенство, получим уравнение: $\dfrac{b\sqrt{3}+b-2b}{2} = 1$. Следовательно, $b = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$. Из прямоугольного треугольника ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 5 + 2\sqrt{3}$.

1.3. Сколько натуральных чисел вида $3^n + 1$, где n – натуральное число, являются точными квадратами?

Ответ: одно.

Пусть $3^n + 1 = m^2$, где m – натуральное число. Тогда $3^n = (m - 1)(m + 1)$. Множители правой части отличаются на 2 и являются степенями тройки. Это возможно только в одном случае: если они равны 1 и 3 соответственно, то есть $m = 2$. Следовательно, условие задачи выполняется только при $n = 1$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Найдите все такие a и b, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют общий корень.

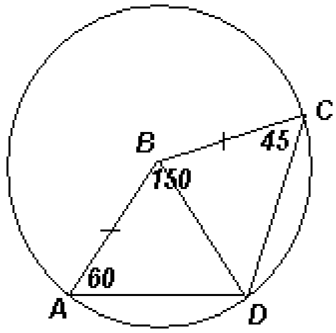
Ответ: $a = b = 0$.

Пусть a и b – искомые числа, x – общий корень данных уравнений. Тогда оба уравнения становятся верными равенствами. Вычитая из первого равенства второе, получим: $(a-b)x+(b-a)(b+a)=0 \Leftrightarrow (a-b)(x-a-b)=0 \Leftrightarrow a=b$ или $x=a+b$.

1) Если $a=b$, то надо найти все такие a, при которых уравнение $x^2+ax+a^2=0$ имеет корни. Поскольку $D=a^2-4a^2=-3a^2\le 0$, то уравнение имеет корни только при $a=0$.

2) Если $x=a+b$, то подставив это значение в любое из уравнений, получим, что $2a^2+3ab+2b^2=0$. Решая это квадратное уравнение относительно переменной a, получим: $D=9b^2-16b^2=-7b^2\le 0$, поэтому полученное равенство выполняется только при $a=b=0$.

2.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A=60°$, $\angle B=150°$, $\angle C=45°$ и $AB=BC$. Докажите, что треугольник ABD – равносторонний.



В данном четырехугольнике $\angle D=360°-(\angle A+\angle B+\angle C)=105°$. Рассмотрим окружность с центром B и радиусом BA, проходящую также через точку C (см. рис. 2). Так как $\angle ADC+\frac{1}{2}\angle ABC=180°$, то эта окружность проходит через точку D. Тогда треугольник ABD – равнобедренный с углом 60°, то есть ABD – равносторонний.

Рис. 2

2.3. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $2n$ является квадратом натурального числа, а $3n$ – кубом.

Ответ: 72.

Так как $2n$ – квадрат натурального числа, то в его разложение на простые множители 2 входит с четным показателем степени. Следовательно, n – четное число. Так как $3n$ – куб натурального числа, то в его разложение на простые множители как число 2, так и число 3 входят с показателем степени, кратным трем. Поэтому в разложении числа $3n$ должно быть не менее трех двоек и двух троек, то есть $n\ge 8\cdot 9=72$. Это число удовлетворяет условию задачи: $2n=144=12^2$; $3n=216=6^3$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

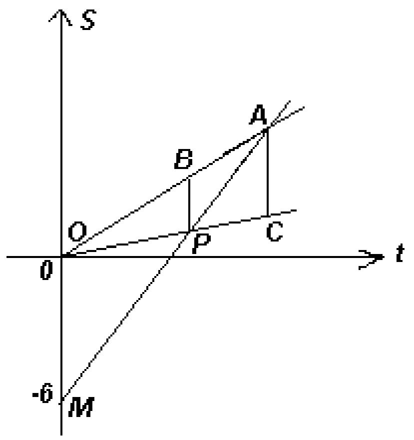
Ответ: 2 км.

Первый способ («физический»). Будем считать, что пешеход неподвижен. Мотоциклист вначале отставал от пешехода на 6 км, а потом обогнал его на 3 км, а велосипедист вначале находился вровень с пешеходом, а затем обогнал его на 3 км. Следовательно, скорость мотоциклиста *относительно пешехода* в 3 раза больше скорости велосипедиста *относительно пешехода*.

Так как мотоциклист, догнав пешехода, проехал *относительно пешехода* 6 км, то велосипедист проехал *относительно пешехода* в три раза меньше, то есть 2 км.

Второй способ («алгебраический»). Пусть скорости мотоциклиста, велосипедиста и пешехода равны соответственно a км/ч, b км/ч и c км/ч. Пусть также с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» мотоциклиста и велосипедиста прошло t часов, а с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» пешехода и мотоциклиста прошло T часов. Тогда составляем три уравнения: $(a - c)t = 9$; $(b - c)t = 3$; $(a - c)T = 6$. Найдем искомое расстояние $S = (b - c)T$. Разделив первое уравнение на второе, получим, что $\frac{a-c}{b-c} = 3$. Тогда $\frac{(a-c)T}{(b-c)T} = 3$, то есть $\frac{6}{S} = 3$, $S = 2$.

Третий способ («геометрический»). Изобразим графики зависимости перемещения S от времени t для всех участников процесса в одной системе координат (см. рис. 3, лучи OA, OC и MA – графики движения велосипедиста, пешехода и мотоциклиста соответственно). Из условия задачи следует, что $OM = 6$; $AC = 3$.



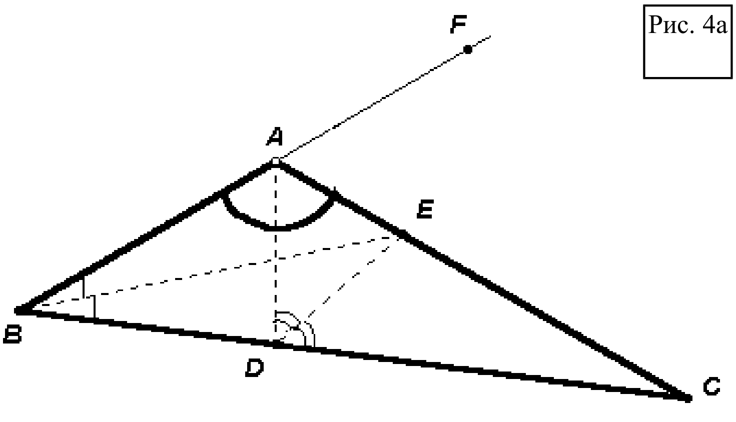
Для того, чтобы найти искомое расстояние BP, рассмотрим две пары подобных треугольников: $\Delta ABP \sim \Delta AOM$, $\Delta OBP \sim \Delta OAC$. Из первого подобия следует, что $\frac{BP}{OM} = \frac{AB}{AO}$, а из второго, что $\frac{BP}{AC} = \frac{BO}{AO}$. Следовательно, $\frac{BP}{OM} + \frac{BP}{AC} = \frac{AB + BO}{AO} = \frac{AO}{AO} = 1$. Тогда $BP = \frac{OM \cdot AC}{OM + AC} = 2$.

Рис. 3

3.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

Ответ: 120°.

Рис. 4а



Первый способ. Рассмотрим треугольник ABD, в котором BE – биссектриса внутреннего угла, а DE – биссектриса внешнего угла ADC (см. рис. 4а). Точка E их пересечения равноудалена от сторон треугольника, поэтому является центром вневписанной окружности (окружности, касающейся стороны AD и продолжений сторон BA и BD). Следовательно, AE – биссектриса внешнего угла DAF этого треугольника. Таким образом, $\angle FAE = \angle EAD = \angle DAB = 60°$, поэтому $\angle BAC = 120°$.

Второй способ. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC}$. Следовательно, точки B, E и D принадлежат геометрическому месту точек, отношение расстояний до которых от точек A и C постоянно. Этим геометрическим местом является окружность Аполлония, центр

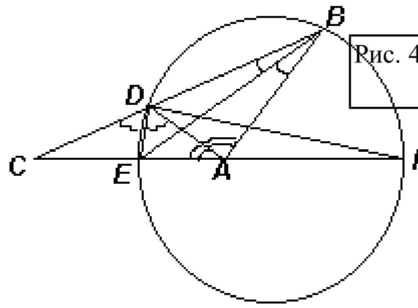


Рис. 4б

которой лежит на продолжении стороны AC данного треугольника (см. рис. 4б). Рассмотрим EF – диаметр окружности, тогда $\angle EDF = 90°$. Так как DE – биссектриса угла ADC, то DF – биссектриса угла ADB. Пусть $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $\angle ABE = \angle CBE = \beta$, $\angle ADF = \angle BDF = \gamma = \angle BDF$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Составим систему уравнений, используя сумму углов треугольников ABD и ABE: $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 180 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 180 \end{cases}$. Выразив $\beta + \gamma$ из одного уравнения и подставив в другое, получим, что $\alpha = 60°$, то есть $\angle BAC = 120°$.

3.3. На острове есть сеть железнодорожных линий, по которой можно проехать с любой станции на любую. Известно, что среди всех станций есть ровно 20 узловых (в каждую из которых сходятся не менее трех линий) и ровно 21 тупиковая. Докажите, что в сети есть кольцевая линия.

Для решения задачи достаточно показать, что если кольцевой линии нет, то разность между количествами тупиковых и узловых станций не меньше двух.

Первый способ. Предположим, что в сети нет «кольца». Рассмотрим одну из тупиковых станций и перегон, ведущий к ней. Если их удалить, то предыдущая станция либо сама станет «тупиком» (если она была «проходной»), либо, если она была «узлом», то станет «проходной» или останется «узлом». В первом случае количества «тупиков» и «узлов» не изменятся, значит, не изменится и их разность. Во втором случае количество «тупиков» уменьшится на один, а количество «узлов» либо не изменится, либо уменьшится на один, поэтому разность между количествами «тупиков» и «узлов» не увеличится. Повторяя эту процедуру, в конце концов мы получим один перегон с двумя «тупиками» на концах. Поэтому изначально в данной сети разность между количествами тупиковых и узловых станций не меньше двух.

Второй способ. Пусть t, p и u – количества тупиковых, «проходных» и узловых станций соответственно. К «тупикам» примыкают t перегонов, к «проходным» станциям – $2p$ перегонов, а к «узлам» – не меньше, чем $3u$ перегонов. Так как каждый перегон подсчитан дважды, то общее количество N перегонов железнодорожной сети таково, что $2N \geq t + 2p + 3u$. С другой стороны, при отсутствии в сети кольцевых линий, $N = t + p + u - 1$.

Упростив неравенство $2(t + p + u - 1) \geq t + 2p + 3u$, получим, что $t - u \geq 2$, что и требовалось.

Отметим, что утверждение задачи останется верным даже в случае, когда не с любой станции можно проехать на любую.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Положительные числа x, y и z удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$. Докажите, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z$.

Первый способ. Заметим, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, доказываемое неравенство равносильно тому, что $xy + yz + zx \ge xyz(x + y + z)$.

1) При любых x, y и z выполняется неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, поэтому из неравенства $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$ следует неравенство $xy + yz + zx \le 3$, а из него, в свою очередь, для положительных x, y и z, следует, что $(xy + yz + zx)^2 \le 3(xy + yz + zx)$.

2) При любых a, b и c выполняется неравенство $(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$. Введя обозначения $xy = a$, $yz = b$ и $zx = c$, получим: $(xy + yz + zx)^2 \ge 3(xy^2z + xyz^2 + x^2yz) = 3xyz(x + y + z)$.

Из неравенств, полученных в пунктах 1) и 2), следует, что $xy+yz+zx\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{3}\ge xyz(x+y+z)$, что и требовалось.

Второй способ. При решении задачи используем следующее утверждение: если $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3$ и $0 \le b_1 \le b_2 \le b_3$, то $3(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) \le (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$. Для его доказательства можно рассмотреть, например, разность между правой и левой частями, которая равна: $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_3 - 2a_1b_3 - 2a_2b_2 - 2a_3b_1 = a_1(b_1 - b_3) + a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_1 - b_2) + a_2(b_3 - b_2) + a_3(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_1) = (b_3 - b_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(a_3 - a_2) + (b_3 - b_2)(a_2 - a_1) \ge 0$, так как в каждой скобке – неотрицательное число.

Пусть $a_1 = x^2$; $a_2 = y^2$; $a_3 = z^2$; $b_1=\frac{1}{z}$; $b_2=\frac{1}{y}$; $b_3=\frac{1}{x}$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < x \le y \le z$, тогда $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}>0$, то есть эти числа удовлетворяют условию доказанного неравенства.

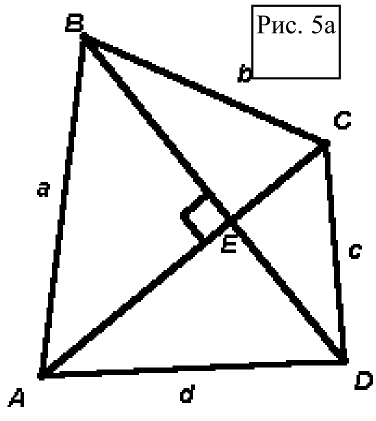
Используя, кроме него, условие задачи, получим, что $3\left(x^2\cdot\frac{1}{x}+y^2\cdot\frac{1}{y}+z^2\cdot\frac{1}{z}\right) \le (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, откуда и следует, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z$.

Отметим, что наряду с утверждением, использованным при доказательстве вторым способом, справедливо и другое: если $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3$ и $0 \le b_1 \le b_2 \le b_3$, то $3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \ge (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$. Эти неравенства называются неравенствами Чебышева, доказываются аналогичным образом и обобщаются для двух упорядоченных наборов из n чисел.

4.2. Вася вырезал из бумаги выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, у которого длины последовательных сторон равны a, b, c и d. Петя тоже вырезал выпуклый четырехугольник с такими же длинами последовательных сторон. Могут ли диагонали Петиного четырехугольника оказаться не перпендикулярными?

Ответ: нет, не могут.

Рис. 5а

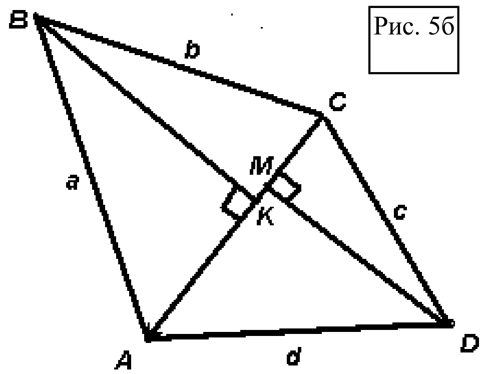


Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали перпендикулярны, E – точка их пересечения (см. рис. 5а). Применяя теорему Пифагора в каждом из четырех прямоугольных треугольников, получим, что $a^2 + c^2 = AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = b^2 + d^2$. Следовательно, $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$.

Так как длины последовательных сторон четырехугольников, вырезанных Васей и Петей, одинаковы, то полученное равенство должно выполняться в обоих четырехугольниках.

Пусть диагонали Петиного четырехугольника не перпендикулярны (см. рис. 5б). Проведем перпендикуляры BK и DM к диагонали AC. Тогда $a^2 - b^2 = AK^2 - CK^2 = (AK + CK)(AK - CK) = AC(AK - CK)$ и $d^2 - c^2 = AM^2 - CM^2 = (AM + CM)(AM - CM) = AC(AM - CM)$. Таким образом получим, что $AK - CK = AM - CM \Leftrightarrow AK + CM = AM + CK$. Это равенство выполняется только в случае, если точки K и M совпадают, то есть диагонали AC и BD этого четырехугольника также перпендикулярны.

Рис. 5б



Отметим, что в процессе решения задачи было доказано следующее утверждение: диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон. Доказательство этого утверждения для случая, когда данный четырехугольник – не выпуклый, проводится аналогично. Во второй части доказательства можно также использовать теорему косинусов.

4.3. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково наименьшее количество хороших пар?

Ответ: 22.

Нарисуем на листе путь из горизонтальных и вертикальных звеньев, проходящий через все клетки по одному разу. (Например, начнем с левой верхней клетки, пройдем верхнюю строку, спустимся на одну клетку, пройдем вторую строку справа налево, спустимся еще на одну клетку и так далее.) Пройдем по этому пути, нумеруя цвета в порядке их появления в первый раз. Когда нам впервые встречается k - й цвет ($k > 1$), мы проходим через хорошую пару цветов (предыдущая клетка окрашена в другой цвет). Эта пара еще не появлялась, поскольку еще не появлялся k - й цвет. Значит, нам встретится не менее, чем $23 - 1 = 22$ различных хороших пар цветов.

Пример, когда хороших пар ровно 22: на тетрадном листе не менее 23 строк; покрасим первую строку в первый цвет, вторую – во второй и так далее, двадцать третью строку и все последующие, если они есть, покрасим в двадцать третий цвет.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Известно, что $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Какие значения может принимать выражение $(a + b)(b + c)(c + a)$?

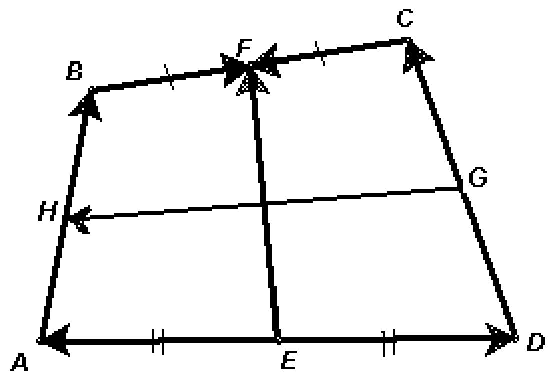
Ответ: 0.

Преобразуем исходное равенство: $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow$ $-\frac{b+c}{(a+b+c)a} = \frac{b+c}{bc} \Leftrightarrow \frac{(b+c)(a^2+ab+ac+bc)}{(a+b+c)abc} = 0 \Leftrightarrow \frac{(b+c)(a+b)(c+a)}{(a+b+c)abc} = 0$.

Следовательно, $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

5.2. Сумма расстояний между серединами противолежащих сторон четырехугольника равна его полупериметру. Верно ли, что этот четырехугольник – параллелограмм?

Ответ: да, верно.



Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Пусть E – середина AD, F – середина BC (см. рис. 6). Тогда $\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$ и $\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CF}$. Сложив эти равенства, и используя, что $\overline{EA} = -\overline{ED}$ и $\overline{FB} = -\overline{FC}$, получим: $\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right)$.

Аналогично, если точки G и H – середины сторон CD и AB соответственно, то $\overline{GH} = \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{DA}\right)$.

Рис. 6

Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ справедливо неравенство: $|\overline{x} + \overline{y}| \le |\overline{x}| + |\overline{y}|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ сонаправлены. Применяя это, получим, что $\left|\overline{EF}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{DC}\right|\right)$ и $\left|\overline{GH}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{DA}\right|\right)$. Таким образом, $\left|\overline{EF}\right| + \left|\overline{GH}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{CD}\right| + \left|DA\right|\right)$, причем равенство, заданное в условии задачи, достигается т. и т. т., когда $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{DC}$ и $\overline{CB} \uparrow\uparrow \overline{DA}$. Это и означает, что $ABCD$ – параллелограмм.

5.3. Набор из 100 чисел таков, что ровно 2006 попарных произведений отрицательны. Сколько нулей в этом наборе?

Ответ: 7.

Пусть в данном наборе x положительных чисел и y отрицательных. Тогда xy = 2006. Разложение 2006 на простые множители имеет вид: 2006 = 2·17·59. Так как каждое из чисел x и y меньше ста, то одно из них равно 59, а другое – 34. Следовательно, количество нулей в наборе составляет 100 – 59 – 34 = 7.