

1.1. Сократите дробь: $\frac{\sqrt{a^2 - a} + \sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{2 - 2a}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{-a} + \sqrt{-a-1}}{\sqrt{2}}$.

Найдем область определения данного выражения: $\begin{cases} a^2 - a \geq 0 \\ a^2 - 1 \geq 0 \\ 2 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) \geq 0 \\ (a-1)(a+1) \geq 0 \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a$

≤ -1 . Используя тождество $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|}$, получим: $\frac{\sqrt{a^2 - a} + \sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{2 - 2a}} = \frac{\sqrt{a(a-1)} + \sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{2(1-a)}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{1-a} + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{-a-1}}{\sqrt{2(1-a)}} = \frac{\sqrt{-a} + \sqrt{-a-1}}{\sqrt{2}}$.

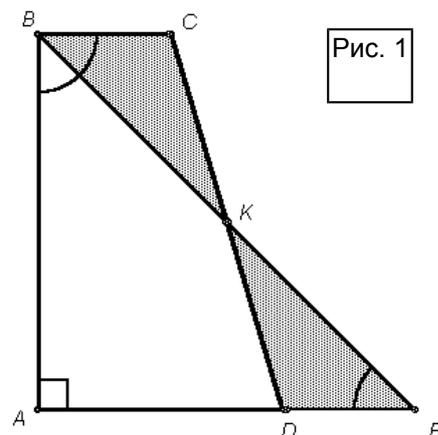


Рис. 1

1.2. В прямоугольной трапеции ABCD высота AB равна сумме оснований AD и BC. Биссектриса угла ABC пересекает сторону CD в точке K. В каком отношении эта точка делит CD?

Ответ: $CK : KD = 1 : 1$.

Пусть E – точка пересечения прямых BK и AD (см. рис. 1). Тогда BAE – равнобедренный прямоугольный треугольник, поэтому $AD + BC = AB = AE = AD + DE$, то есть, $BC = DE$. Следовательно, треугольники BKC и EKD равны по стороне и двум прилежащим углам, поэтому, $CK = KD$.

1.3. В какое наименьшее количество цветов надо раскрасить доску 100×100 , чтобы никакие две соседние клетки (по горизонтали, вертикали или диагонали) не были окрашены в одинаковый цвет?

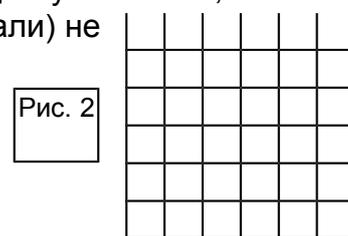


Рис. 2

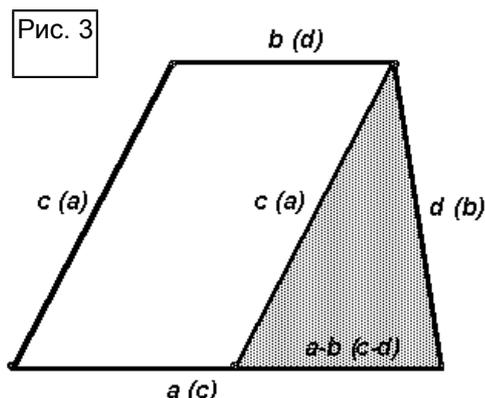
Ответ: в четыре цвета.

Разобьем доску на квадраты 2×2 и покрасим каждый квадрат в четыре цвета одинаковым образом (см. рис. 2). В этом случае условие задачи выполняется. Обойтись меньшим количеством цветов невозможно, так как внутри такого квадрата каждая клетка соседствует с тремя остальными.

2.1. Пусть $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где $b > 0$ и $c > 0$, пусть хотя бы один корень. Пусть α, β – корни первого уравнения, γ, δ – корни второго. Тогда $\alpha + \beta = -2b$, $\alpha\beta = c$, $\gamma + \delta = -2c$, $\gamma\delta = b$.

Ответ: $b = c = 1$.

Так как каждое уравнение имеет хотя бы один корень, то $b^2 - c \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq c$ и $c^2 - b \geq 0 \Leftrightarrow c^2 \geq b$. Кроме того, по теореме Виета, произведение корней первого уравнения равно c , а произведение корней второго уравнения равно b . Из условия следует, что $bc = 1$. Подставим $b = \frac{1}{c}$ в каждое из полученных неравенств. Учитывая, что $b > 0$ и $c > 0$, получим, что $c \leq 1$ и $c \geq 1$ соответственно, то есть, $c = 1$, значит, и $b = 1$.



Отметим, что при найденных значениях b и c каждое из данных уравнений имеет вид $x^2 + 2x + 1 = 0$, то есть, имеет один корень (с точки зрения применения теоремы Виета – два совпадающих корня).

2.2. Существуют ли четыре отрезка с длинами a , b , c и d такие, что можно составить две трапеции: одну с основаниями a и b и боковыми сторонами c и d , а другую – с основаниями c и d и боковыми сторонами a и b ?

Ответ: нет, не существуют.

Так как основания трапеции не могут быть равными, то без ограничения общности можно считать, что $a > b$ и $c > d$.

Предположим, что первая трапеция построена (см. рис. 3). Проведем из ее вершины отрезок, параллельный соответствующей боковой стороне, который разбивает трапецию на параллелограмм и треугольник со сторонами c , d и $a - b$. В силу неравенства треугольника, $d + (a - b) > c \Leftrightarrow a - b > c - d$.

Пусть существует и вторая трапеция, тогда, рассуждая аналогично, получим, что $b + (c - d) > a \Leftrightarrow c - d > a - b$. Полученное противоречие показывает, что две трапеции, удовлетворяющих условию, составить нельзя.

2.3. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2004} - 1$ является какой-либо степенью двойки?

Ответ: нет, не существует.

Преобразуем: $n^{2004} - 1 = (n^{2002})^2 - 1 = (n^{2002} - 1)(n^{2002} + 1)$. Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если $n^{2004} - 1 = 2$, а $n^{2004} + 1 = 4$, но таких натуральных n не существует.

3.1. Пусть $xyz = 1$ и $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = z + \frac{1}{z}$. Вычислите $a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

Ответ: 4.

Заметим, что $a = x + \frac{1}{x} = x + \frac{xyz}{x} = x + yz$. Аналогично, $b = y + zx$ и $c = z + xy$. Тогда $a^2 = x^2 + 2xyz + y^2z^2 = x^2 + y^2z^2 + 2$; $b^2 = y^2 + z^2x^2 + 2$; $c^2 = z^2 + x^2y^2 + 2$; $abc = (x + yz)(y + zx)(z + xy) = xyz + x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + xy^3z + xyz^3 + x^3yz = 2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$.

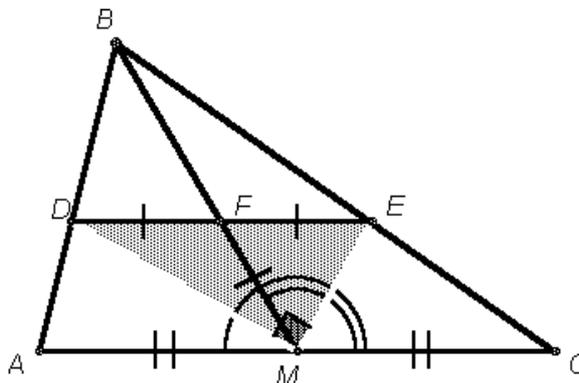


Рис. 4

3.2. По свойству биссектрисы из треугольников AMB и CMB (см. рис. 4) получим, что $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM}$ и $\frac{CE}{BE} = \frac{CM}{BM}$. По условию, $AM = CM$, значит, $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BE}$, следовательно, $DE \parallel AC$ (по теореме, обратной теореме Фалеса, для угла ABC или же из подобия треугольников DBE и ABC). Тогда F – середина отрезка DE .

Ответ: $0,5d$.

По свойству биссектрисы из треугольников AMB и CMB (см. рис. 4) получим, что $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM}$ и $\frac{CE}{BE} = \frac{CM}{BM}$. По условию, $AM = CM$, значит, $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BE}$, следовательно, $DE \parallel AC$ (по теореме, обратной теореме Фалеса, для угла ABC или же из подобия треугольников DBE и ABC). Тогда F – середина отрезка DE .

Так как $\angle DME = 90^\circ$ смежных углов, то треугольник DME – прямоугольный. Его медиана MF , проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы DE .

3.3. На прямой сначала отметили 100 точек, затем отметили середины всех отрезков с концами в ранее отмеченных точках. Какое наименьшее количество точек могло получиться в итоге?

Ответ: 199.

Отмеченные вначале сто точек образуют, помимо прочих, 99 отрезков с концами в соседних точках. Середины этих отрезков не могли быть отмечены ранее, поэтому меньше, чем 99 точек к уже отмеченным ста точкам добавиться не могут.

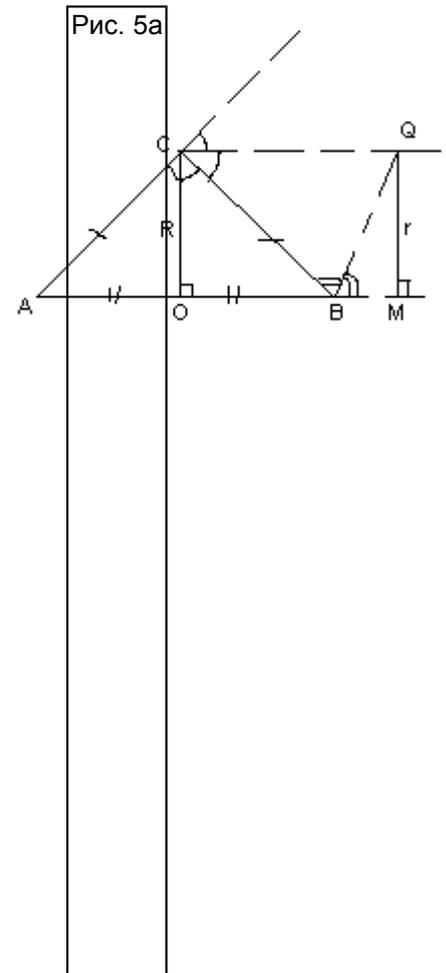
Покажем, что 199 точек получиться могло. Пусть отмеченные сначала 100 точек расположены на координатной прямой так, что имеют координаты $1, 2, 3, \dots, 99, 100$.

Координата середины отрезка AB вычисляется по формуле $x = \frac{x_A + x_B}{2}$, поэтому середина любого отрезка с концами в этих точках имеет либо целую, либо полуцелую координату x такую, что $1 \leq x \leq 100$. Таких значений x ровно 199.

4.1. Докажите, что $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{2004^2 - 1} < \frac{3}{4}$.

Заметим, что если $n \neq \pm 1$, то $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$.

Тогда $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{2004^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} \right) =$
 $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$, что и требовалось доказать.

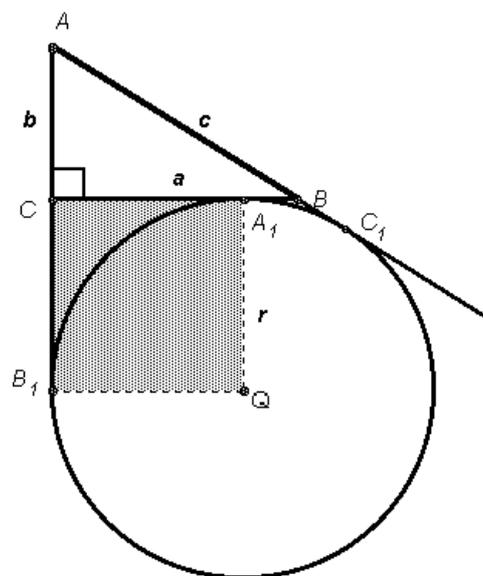


4.2. Существует ли треугольник, в котором радиус описанной окружности равен радиусу вневписанной окружности (то есть, окружности, касающейся одной из его сторон и продолжений двух других)?

Ответ: да, существует.

Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (см. рис. 5а). Возможны различные способы доказательства того, что он удовлетворяет условию.

Первый способ. Середина O гипотенузы AB треугольника является центром описанной около него окружности, а ее радиус $R = CO$, причем CO является также и высотой треугольника.



Центр Q окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB , является точкой пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника. Так как биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его

основанию, то $CQ \parallel AB$. Расстояние QM от точки Q до прямой AB равно радиусу r вневписанной окружности и равно CO .

Второй способ. Пусть a , b и c – длины сторон треугольника ABC (см. рис. 5б), тогда радиус описанной окружности $R = \frac{1}{2}c$.

Рис. 5б

Рассмотрим вневписанную окружность с центром Q и радиусом r , касающуюся стороны BC . Если B_1 и C_1 – точки ее касания с продолжениями сторон AC и AB , то из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $AB_1 = AC_1$

$= p = \frac{a+b+c}{2}$. Кроме того, так как в нашем примере $\angle B_1CB = 90^\circ$, то QA_1CB_1 – квадрат,

поэтому $CB_1 = r$. Таким образом, $r = p - b = \frac{a-b+c}{2} = \frac{1}{2}c$, поскольку мы рассматриваем треугольник, в котором $a = b$.

Существуют и другие примеры, в том числе не равнобедренных и не прямоугольных треугольников, удовлетворяющие условию, но построить их существенно сложнее.

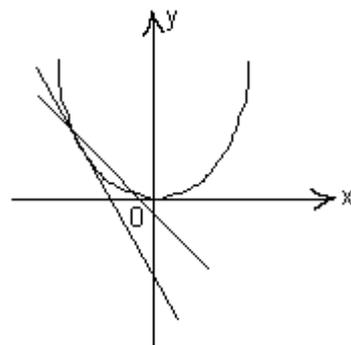
4.3. Некоторое простое число возвели в четвертую степень и получили десятизначное число. Могут ли все цифры полученного числа быть различными?

Ответ: нет, не могут.

Предположим, что все цифры полученного числа различны, тогда это цифры 0, 1, 2, ..., 9, взятые по одному разу. Сумма этих цифр равна 45, то есть, полученное десятизначное число делится на 9. Простое число, которое возвели в четвертую степень, очевидно, не равно трем, поэтому не делится на 3. Следовательно, и десятизначное число не делится на 3, а значит не делится и на 9. Таким образом, оно имеет в своей записи хотя бы две одинаковые цифры.

5.1. Существуют ли числа a, b, c и d , удовлетворяющие неравенству $0 < a < b < c < d$, такие что уравнения $x^4 + bx + c = 0$ и $x^4 + ax + d = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

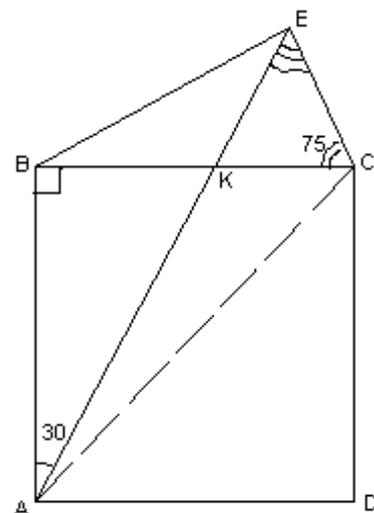
Ответ: нет, не существуют.



Первый способ. Так как все коэффициенты данных уравнений – положительные числа, то неотрицательных корней эти уравнения иметь не могут.

Пусть число x_0 является общим корнем данных уравнений, тогда $x_0^4 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^4 + ax_0 + d = 0$ – верные числовые равенства. Вычтем из одного равенства другое, тогда $(b - a)x_0 + (c - d) = 0$ – также верное числовое равенство. Следовательно, $x_0 = \frac{d - c}{b - a} > 0$. Полученное противоречие показывает, что общих корней данные уравнения не имеют.

Рис. 6



Второй способ. Используем графические соображения. Запишем данные уравнения в виде $x^4 = -bx - c$ и $x^4 = -ax - d$. Уравнения имеют общий корень тогда, и только тогда, когда графики линейных функций $y = -bx - c$ и $y = -ax - d$ пересекают график функции $y = x^4$ в одной и той же точке. С одной стороны, так как все коэффициенты в формулах, задающих линейные функции, отрицательны, то эта точка должна лежать во II координатной четверти (см. рис. 6). С другой стороны, ее абсцисса является решением уравнения $-bx - c = -ax - d$, то есть $x = \frac{d - c}{b - a} > 0$. Получено противоречие.

5.2. Дан квадрат $ABCD$. Луч AE пересекает сторону BC , причем $\angle BAE = 30^\circ$, а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.

Рис. 7

Ответ: 30° .

Проведем в данном квадрате диагональ AC (см. рис. 7). Из условия следует, что $\angle EKC = \angle AKB = 60^\circ$, значит $\angle AEC = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle ABC$. Поэтому, если провести окружность с центром в точке B и радиусом $R = BA = BC$, то точка E будет лежать на этой окружности. Следовательно, $BE = BC$, то есть, треугольник BEC – равнобедренный с углом 30° при вершине.

Отметим, что задачу также можно решить «обратным ходом», то есть, угадать ответ и с помощью подсчета величин углов доказать, что данная конструкция – «жесткая».

5.3. На окружности расположены шестнадцать точек. Эти точки требуется соединить восемью хордами, не имеющими общих точек (даже общих концов). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1430 способами.

Предположим, что на окружности последовательно отмечено $2n$ точек: $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$. Пусть x_n – количество способов провести n непересекающихся хорд.

Заметим, что любая хорда, удовлетворяющая условию, должна быть проведена так, чтобы по обе стороны от нее располагалось четное количество данных точек. При этом, если какая-то хорда зафиксирована, то группы точек с одной и с другой стороны от нее можно рассматривать независимо, и решать задачу отдельно для каждой группы. Тогда количество способов провести $n - 1$ хорду равно произведению количества способов провести хорды в каждой из образовавшихся групп точек.

Будем последовательно фиксировать хорды $A_1A_2, A_1A_4, A_1A_6, \dots, A_1A_{2n}$. Тогда число x_n будет складываться из количества способов провести оставшиеся хорды в каждом из этих n случаев, то есть $x_n = x_{n-1} + x_1 \times x_{n-2} + x_2 \times x_{n-3} + x_3 \times x_{n-4} + \dots + x_{n-2} \times x_1 + x_{n-1}$.

Заметим, что ни какой из способов расстановки хорд мы не подсчитали дважды, так как в каждом из случаев можно провести только одну хорду с концом A_1 .

Итак, $x_1 = 1, x_2 = 2$ (это можно было заметить и без общей формулы), $x_3 = 5, x_4 = 14, x_5 = 42, x_6 = 132, x_7 = 429, x_8 = 1430$.

Числа, полученные в процессе решения задачи, называются числами Каталана. Их общая формула: $x_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$, где C_{2n+1}^n – количество сочетаний из $2n + 1$ по n , то есть, количество способов выбрать n предметов из $2n + 1$. Более подробно о числах Каталана – см., например, Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник «Конкретная математика» или Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов «Алгебра и теория чисел».