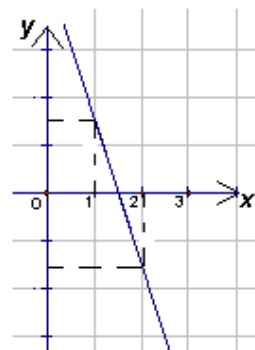


9 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. Про коэффициенты линейной функции $y = kx + b$ известно, что $k + b > 0$, а $2k + b < 0$. Может ли график этой функции пересекать ось абсцисс в точке $x = 3$?

Ответ: нет, не может.



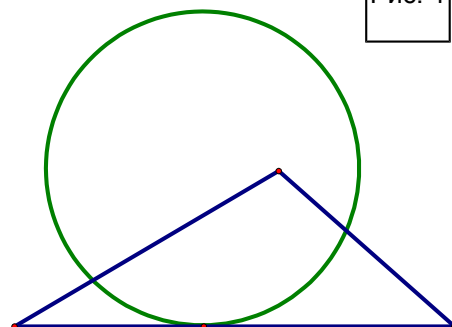
Первый способ. Графиком линейной функции является прямая, которая либо совпадает с осью x , либо имеет с ней не более одной общей точки.

Из условия следует, что $k + b = y(1) > 0$, а $2k + b = y(2) < 0$, то есть график пересекает ось абсцисс в точке $x_0 \in (1; 2)$ (см. рис. 1).

Второй способ. Пусть $(3; 0)$ – точка пересечения графика с осью абсцисс. Тогда выполняется равенство $3k + b = 0$. Так как $3k + b = 2k + (k + b) = k + (2k + b)$, то из условия $k + b > 0$ следует, что $2k < 0$, а из условия $2k + b < 0$ следует, что $k > 0$.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно.

Рис. 1



1.2. Каждая сторона треугольника имеет с окружностью ровно одну общую точку, отличную от вершины. Обязательно ли эта окружность – вписанная?

Ответ: нет, не обязательно.

Рис. 2

Например, см. рис. 2.

1.3. Можно ли на некоторые клетки доски 6×6 положить по камешку так, чтобы количество камешков в каждой горизонтали было четно, а количество камешков в каждой вертикали – нечетно?

Рис. 3

⊗	⊗				
		⊗	⊗		
				⊗	⊗

Ответ: да, можно.

Например, см. рис. 3. В каждом столбце доски – по одному камешку, а в каждой строке – либо 2 камешка, либо 0.

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Сократите дробь $\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2}$, если известно, что $a^2 + b^2 = (a+b-c)^2$.

Ответ: $\frac{a-c}{b-c}$.

Первый способ. Из условия следует, что $a^2 = (a+b-c)^2 - b^2 = (a-c)(a+2b-c)$,
 $b^2 = (a+b-c)^2 - a^2 = (b-c)(2a+b-c)$.

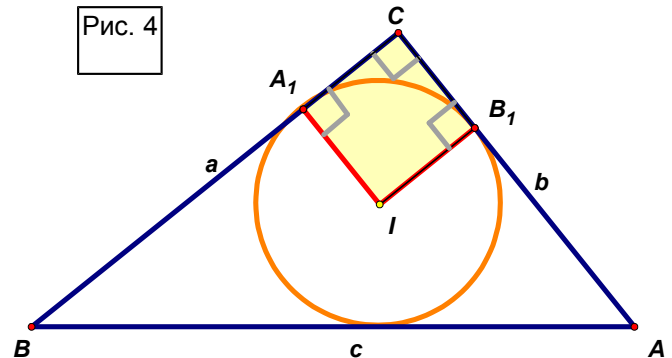
Тогда: $\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{(a-c)(a+2b-c) + (a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c) + (b-c)^2} = \frac{(a-c)(2a+2b-2c)}{(b-c)(2a+2b-2c)} = \frac{a-c}{b-c}$.

Второй способ. Для того, чтобы дважды получить выражение $a^2 + b^2$, в числителе дроби прибавим и вычтем b^2 , а в знаменателе дроби – a^2 :
 $\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a^2 + b^2 + (a-c)^2 - b^2}{b^2 + a^2 + (b-c)^2 - a^2} = \frac{(a+b-c)^2 + (a-c+b)(a-c-b)}{(a+b-c)^2 + (b-c+a)(b-c-a)} = \frac{(a+b-c)(2a-2c)}{(a+b-c)(2b-2c)} = \frac{a-c}{b-c}$.

2.2. В прямоугольном треугольнике отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 2 : 5. Найдите отношение катетов.

Ответ: 3 : 4.

Рис. 4



Пусть в прямоугольном треугольнике больший катет равен a , меньший катет – b , гипотенуза равна c . Тогда радиус R описанной окружности равен $\frac{c}{2}$, а радиус r вписанной окружности равен $\frac{a+b-c}{2}$. Воспользовавшись условием задачи и теоремой Пифагора,

составим систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{a+b-c}{c} = \frac{2}{5} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Обозначим: $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ ($x > y$). Тогда
$$\begin{cases} x+y = \frac{7}{5} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{7}{5} \\ (x+y)^2 - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{7}{5} \\ xy = \frac{12}{25} \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} = 0$. Решив его, получим, что $t = \frac{4}{5}$ или $t = \frac{3}{5}$. Следовательно,

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, то есть данный треугольник – египетский.

Формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, использованную в решении задачи, можно получить, например, так. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть I – центр его вписанной окружности, A_1 и B_1 – точки ее касания с катетами BC и AC (см. рис. 4). Тогда IA_1CB_1 – квадрат, $BA_1 = a - r$, $AB_1 = b - r$. Из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $BA_1 + AB_1 = c$.

2.3. В клетки таблицы 3×3 расставлены все цифры от 1 до 9 и подсчитана сумма чисел в каждой строке. Какое наибольшее количество таких сумм могло быть точными квадратами?

Ответ: две суммы.

1	2	6	9
3	4	9	16
5	7	8	20

В виде сумм трех цифр от 1 до 9 можно представить только два точных квадрата: 9 и 16, так как $4 < 1 + 2 + 3$, а $25 > 7 + 8 + 9$. Значит, три суммы в строках могут оказаться точными квадратами только тогда, когда одно из чисел 9 или 16 повторится хотя бы дважды. Это невозможно, так как сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, но $9 + 9 + 16 < 9 + 16 + 16 < 45$, а $16 + 16 + 16 > 45$.

Один из возможных примеров двух сумм, являющихся точными квадратами, показан в таблице.

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

3.1. Представьте многочлен $3x^4 + 1$ в виде суммы квадратов трех многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.

Ответ: например, $3x^4 + 1 = (x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2$.

Можно доказать, что такое представление – единственное (с точностью до замены любого из многочленов на ему противоположный).

Действительно, пусть $3x^4 + 1 = P^2(x) + Q^2(x) + R^2(x)$, где P , Q и R – многочлены с целыми коэффициентами. Тогда каждый из них должен иметь вторую степень, причем коэффициент при x^2 у каждого многочлена должен быть равен ± 1 . Кроме того, только один из этих многочленов может иметь свободный член, отличный от нуля, который должен быть равен ± 1 .

Таким образом, $P(x) = \pm x^2 + ax$; $Q(x) = \pm x^2 + bx$; $R(x) = \pm x^2 + cx \pm 1$. Тогда $P^2(x) + Q^2(x) + R^2(x) = 3x^4 \pm 2(a \pm b \pm c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2 \pm 2) x^2 \pm 2cx + 1$. Следовательно,
$$\begin{cases} a \pm b \pm c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 \pm 2 = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Учитывая, что a и b – целые числа, получим: $c = 0$; $a = \pm 1$; $b = \pm 1$.

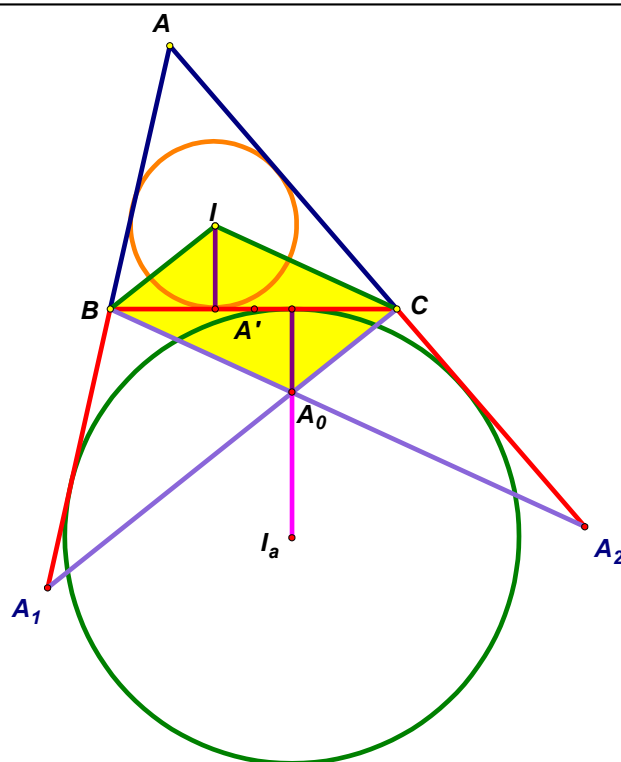
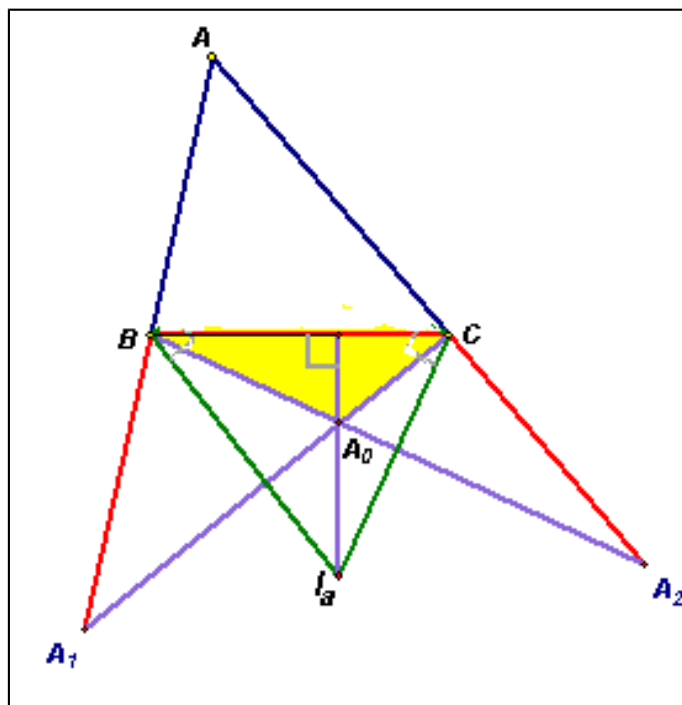
При этом в левой части второго равенства должно стоять число -2 , а это означает, что $R(x) = \pm(x^2 - 1)$; $P(x) = \pm(x^2 + x)$; $Q(x) = \pm(x^2 - x)$, что и требовалось доказать.

3.2. Дан треугольник ABC . На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1 . Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC , содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC . (Напомним, что вневписанной называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC (см. рис. 5 а, б).

Первый способ. BI_a и CI_a – биссектрисы внешних углов B и C данного треугольника. По условию, треугольники A_1BC и A_2CB – равнобедренные, поэтому $BI_a \perp A_1C$ и $CI_a \perp A_2B$ (см. рис. 5а). Следовательно, I_a – точка пересечения двух высот треугольника A_0BC , значит третья высота этого треугольника лежит на прямой A_0I_a , то есть $A_0I_a \perp BC$, что и требовалось доказать.

Рис. 5а



Второй способ. Так как треугольник A_1BC – равнобедренный, то $\angle BA_1C = \frac{180^\circ - (180^\circ - \angle B)}{2} = \frac{\angle B}{2}$, то есть отрезок A_1C параллелен биссектрисе BI (см. рис.

5б). Аналогично, отрезок A_2B параллелен биссектрисе $\tilde{NI}$. Следовательно, четырехугольник A_0BIC является параллелограммом.

Поэтому основания перпендикуляров, опущенных из точек I и A_0 на отрезок BC , равноудалены от его середины – точки A' . Этим же свойством обладают точки касания вписанной и невписанной окружностей со стороной BC , поэтому радиус невписанной окружности лежит на прямой, проходящей через точку A_0 перпендикулярно к BC .

Рис. 5б

Следовательно, эта прямая содержит центр I_a невписанной окружности.

3.3. Можно ли числа 1, 2, ..., 20 расставить в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось среднему арифметическому чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ: нет, нельзя.

Числа, стоящие на концах каждого ребра, должны быть одинаковой четности, иначе их среднее арифметическое не будет целым. Значит, числа, стоящие в вершинах куба, либо все четные, либо все нечетные. Тогда, хотя бы одно из чисел 1 или 20 (наименьшее или наибольшее) должно стоять в середине какого-то ребра. Но, если $a \leq b$, то $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$, то есть числа 1 и 20 не могут являться средними арифметическими никаких двух из данных чисел. Следовательно, требуемая расстановка невозможна.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов).

4.1. Найдите все положительные решения уравнения $x(x+1)^2 + y(y+1)^2 = 8xy$.

Ответ: (1; 1).

Первый способ. В левой части уравнения прибавим и вычтем выражение $4x^2 + 4y^2$. Получим: $x(x+1)^2 - 4x^2 + y(y+1)^2 - 4y^2 + 4x^2 + 4y^2 - 8xy = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) - 4x^2 + y(y^2 + 2y + 1) - 4y^2 + 4(x^2 + y^2 - 2xy) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) + y(y^2 - 2y + 1) + 4(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 + y(y-1)^2 + 4(x-y)^2 = 0$.

Так как x и y – положительные числа, то каждое из слагаемых, полученных в левой части уравнения, неотрицательно. Их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то есть, если $x = y = 1$.

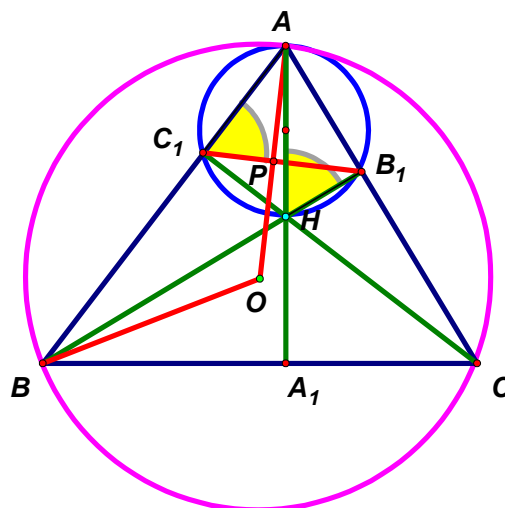
Второй способ. Для любых x и y выполняются неравенства: $(x+1)^2 \geq 4x$ и $(y+1)^2 \geq 4y$. Тогда, при $x > 0$ и $y > 0$ $x(x+1)^2 + y(y+1)^2 \geq 4x^2 + 4y^2 \geq 8xy$, так как $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Равенство достигается т. и т. т., когда $x = y = 1$.

Третий способ. Учитывая, что $x > 0$ и $y > 0$, разделим обе части уравнения на выражение $2xy$. Получим: $\frac{(x+1)^2}{2y} + \frac{(y+1)^2}{2x} = 4$.

Оценим левую часть полученного уравнения, используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, а также неравенство о сумме двух взаимно

обратных чисел: $\frac{(x+1)^2}{2y} + \frac{(y+1)^2}{2x} \geq \sqrt{\frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy}} = \frac{(x+1)(y+1)}{\sqrt{xy}} = \frac{xy + x + y + 1}{\sqrt{xy}} =$

$$= \left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \right) + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right) \geq 2 + 2 = 4. \text{ Равенство возможно т. и т. т., когда } x = y = 1.$$



4.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Через вершины A , B и C проходят прямые, перпендикулярные отрезкам B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Докажем, что эти прямые будут пересекаться в центре O окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 6 а, б). Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC .

Первый способ. Треугольник BOA – равнобедренный, $\angle BOA = 2\angle BCA$, поэтому, $\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle BOA}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle C}{2} = 90^\circ - \angle C$ (см. рис. 6а).

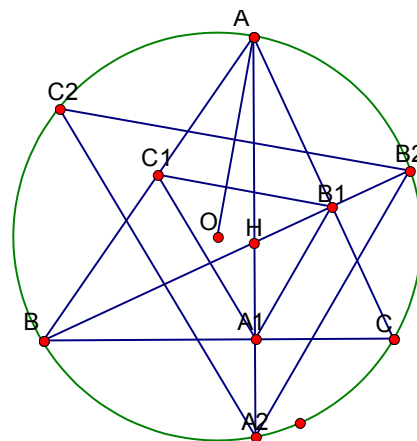
Рис. 6а

Из условия следует, что $\angle HC_1A = \angle HB_1A = 90^\circ$, поэтому четырехугольник AC_1HB_1 – вписанный. Следовательно, $\angle AC_1B_1 = \angle AHB_1 = 90^\circ - \angle A_1AC = \angle C$. Таким образом, в треугольнике AC_1P (P – точка пересечения прямых AO и B_1C_1) сумма двух углов равна 90° , то есть $AO \perp B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $BO \perp C_1A_1$ и $CO \perp A_1B_1$.

Равенство углов AC_1B_1 и ACB можно получить иначе, например, из того, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны (общий угол A и пропорциональность двух сторон).

Второй способ. Рассмотрим точки A_2 , B_2 и C_2 , симметричные точке H относительно сторон BC , AC и AB соответственно (см. рис. 6б). Эти точки лежат на окружности, описанной около треугольника ABC . Кроме того, треугольник $A_2B_2C_2$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром H и коэффициентом 2, поэтому стороны этих треугольников соответственно параллельны.

Доказав (одним из уже предложенных способов) равенство $\angle \hat{A}A_1\tilde{N}_1 = \angle BAC = \angle \tilde{N}A_1\hat{A}_1$ и учитывая, что $AA_1 \perp BC$, получим, что $\angle \hat{A}A_1\tilde{N}_1 = \angle \hat{A}A_1\hat{A}_1$, поэтому точка A является серединой дуги $B_2\tilde{N}_2$. Следовательно, $OA \perp B_2C_2$, то есть $AO \perp B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $BO \perp C_1A_1$ и $CO \perp A_1B_1$.



Отметим, что для тупоугольного треугольника утверждение задачи также справедливо. Более того, как следует из первого способа решения, прямые AO и $АН$ образуют равные углы со сторонами AB и AC соответственно. Аналогично, прямые BO и $ВН$ образуют равные углы со сторонами BC и BA , а прямые CO и CH – со сторонами CB и CA . Такие точки O и H называют **изогонально сопряженными** относительно треугольника ABC .

Рис. 66

Общее утверждение формулируется тогда следующим образом. Пусть точки P и Q – изогонально сопряженные относительно треугольника ABC , а треугольник $A_P B_P C_P$ образован основаниями перпендикуляров, опущенных из P на прямые, содержащие стороны треугольника ABC (**педальный треугольник**). Тогда прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точкой Q , перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника $A_P B_P C_P$.

4.3. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, сумма которых равна 407?

Ответ: на шесть нулей.

Например, $250 + 125 + 32 = 407$ и $250 \times 125 \times 32 = 5^6 \times 2^6 = 10^6 = 1000000$. Докажем, что больше шести нулей быть не может.

Первый способ. Разложим искомое произведение на простые множители. Если на его конце больше шести нулей, то оно должно содержать множитель 5 не менее, чем в седьмой степени. При этом каждое из трех данных чисел может содержать множитель 5 не более, чем в третьей степени, так как $5^4 = 625 > 407$. Причем, если два слагаемых делятся на 5, то третье слагаемое на 5 не делится, так как их сумма 407 не делится на 5. Таким образом, множитель 5 содержится не более, чем в третьей степени, и не более, чем в двух слагаемых, то есть произведение содержит его не более, чем в шестой степени.

Второй способ. Пусть a , b и c – три данных числа, тогда $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{407}{3} < 200$.

Следовательно, $abc < 200^3 = 8000000$, то есть произведение не может содержать более шести нулей.

Пятый тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

5.1. Известно, что $\{x\} \cdot \{x\} = 100$. Найдите $[x^2] - [x]^2$.

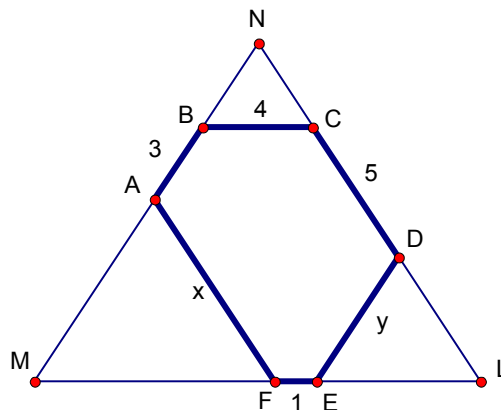
Напомним, что $[x]$ (целая часть x) – наибольшее целое число, не превосходящее x ; $\{x\}$ (дробная часть x) – разность между числом x и его целой частью.

Ответ: 200.

Так как $x = [x] + \{x\}$, то $[x^2] = [([x] + \{x\})^2] = [[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2] = [[x]^2 + 200 + \{x\}^2]$. Кроме того, число $[x]^2 + 200$ – целое, а $0 < \{x\}^2 < 1$. Следовательно, $[[x]^2 + 200 + \{x\}^2] = [x]^2 + 200$.

Таким образом, $[x^2] - [x]^2 = 200$.

5.2. Каждый угол шестиугольника $ABCDEF$ равен 120° . Найдите DE и AF , если $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$.



Ответ: $DE = 6$; $AF = 8$.

Рис. 7

Продолжим стороны AB , CD и EF до их попарного пересечения в точках M , N и L (см. рис. 7). Тогда в каждом из треугольников MAF , BNC и DLE есть по два угла, равных 60° , то есть эти треугольники равносторонние. Следовательно, треугольник MNL – также равносторонний.

Пусть $AF = x$; $DE = y$. Тогда $x + 3 + 4 = 4 + 5 + y = y + 1 + x$, откуда $x = 8$, $y = 6$.

5.3. Среди первых 99 натуральных чисел выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Найдите сумму выбранных чисел.

Ответ: 3725.

Разобьем первые 99 натуральных чисел (кроме числа 50) на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась 100: (1; 99), (2; 98), ..., (48; 52), (49; 51).

Из условия следует, что из каждой пары могло быть выбрано только одно число, таких пар – 49, поэтому число 50 должно быть выбрано обязательно.

Тогда из последней пары не могло быть выбрано число 49 (иначе $50 + 49 = 99$), то есть из нее выбрано число 51. Значит, из предпоследней пары должно было быть выбрано число 52 (иначе $48 + 51 = 99$). Аналогичным рассуждением получим, что из предыдущей пары выбрано число 53, и так далее, до числа 99, выбранного из первой пары.

Таким образом, искомый набор чисел восстанавливается однозначно: 50, 51, ..., 99. Сумма чисел в таком наборе равна: $50 + 51 + \dots + 99 = (50 + 99) \cdot 25 = 149 \cdot 25 = 3725$.