1.1. (***6 баллов***) Найдите $a^6 + 3a^2b^2 + b^6$, если $a^2 + b^2 = 1$.

Первый способ. $a^6 + 3a^2b^2 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) + 3a^2b^2 = a^4 - a^2b^2 + b^4 + 3a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = 1$.

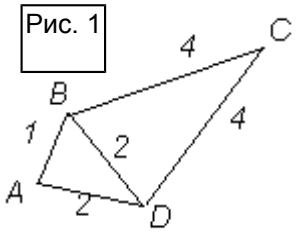
Второй способ. $a^6 + 3a^2b^2 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4 + 3a^2b^2 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2) + 3a^2b^2 = 1 - 3a^2b^2 + 3a^2b^2 = 1$.

Третий способ. Так как $b^2 = 1 - a^2$, то $a^6 + 3a^2b^2 + b^6 = a^6 + 3a^2(1 - a^2) + (1 - a^2)^3 = a^6 + 3a^2 - 3a^4 + 1 - 3a^2 + 3a^4 - a^6 = 1$.

Ответ: 1.

1.2. (***6 баллов***) Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей делит его на два равнобедренных треугольника и имеет длину 2. Найдите периметр четырехугольника.

Рис. 1



Пусть данные стороны четырехугольника *ABCD* – соседние, например, *AB* и *BC* (см. рис. 1). Тогда, используя неравенство треугольника, получим, что диагональю длины 2 может быть только *BD*. Применяя неравенство треугольника (или условие того, что три точки лежат на одной прямой) для треугольников *ABD* и *CBD*, получим, что $AD = BD = 2$; $DC = BC = 4$. Значит, периметр *ABCD* равен 11. Если данные стороны – противолежащие, например, *AB* и *CD* то, рассуждая аналогично, приходим к такому же четырехугольнику. Ответ: 11.

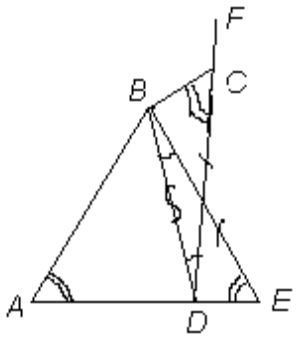
1.3. (***6 баллов***) После игры в футбол (два тайма по 45 минут) ребята делились впечатлениями.
Петя: «Я забил на один гол больше, чем все остальные, вместе взятые».
Миша: «Во втором тайме было забито вдвое больше голов, чем в первом».
Олег: «Из всех мячей, забитых в первом тайме, я забил половину».
Верно ли, что каждый из них сказал правду?

Предположим, что все высказывания – истинны, тогда, из того, что сказал Олег следует, что в первом тайме забито четное количество голов, тогда, из высказывания Миши следует, что количество голов, забитых во втором тайме также четно, значит, и общее количество забитых мячей – четно. Вместе с тем, из слов Пети можно определить, что количество забитых мячей – нечетно. Таким образом получено противоречие, и кто-то из мальчиков сказал неправду. Ответ: нет.

2.1. (***7 баллов***) Сравните числа: 99! и 50^{99}. (*Напомним, что* $n! = 1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$.)

$99! = 1\times2\times\ldots\times50\times\ldots\times98\times99 = (50 - 49)(50 - 48)\times\ldots\times(50 - 1)\times50\times(50 + 1)\times\ldots\times(50 + 49) = 50(50^2 - 1^2)(50^2 - 2^2)\times\ldots\times(50^2 - 49^2) < 50\times(50^2)^{49} < 50^{99}$. Ответ: $99! < 50^{99}$.

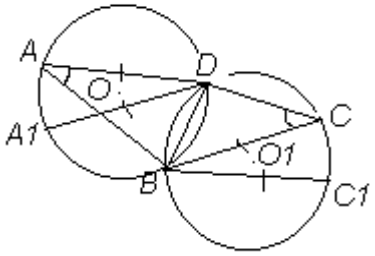
2.2. (***7 баллов***) В выпуклом четырехугольнике *ABCD* равны стороны *AB* и *CD* и равны углы *A* и *C*. Верно ли, что этот четырехугольник – параллелограмм?



Ответ: утверждение неверно.

Примеры четырехугольников, отличных от параллелограмма и удовлетворяющих условию, можно получить различными способами.

Рис. 2а



Первый способ. Рассмотрим равнобедренный треугольник *ABE* (см. рис. 2а). На его основании *AE* выберем такую точку *D*, что *AD* > *DE*. Построим угол *BDF*, равный углу *DBE* так, чтобы луч *DF* пересекал *BE*. На этом луче отложим отрезок *CD*, равный *BE*. Тогда, ΔBDE = ΔDBC по двум сторонам и углу между ними. *ABCD* – искомый четырехугольник, так как ∠*BAD* = ∠*BED* = ∠*BCD* и *AB* = *BE* = *CD.*

Второй способ. Рассмотрим две окружности равного радиуса с центрами O и O_1 (см. рис. 2б). *BD* – их общая хорда. Проведем в одной окружности хорды *DA* и DA_1 на одинаковом расстоянии от центра O, а в другой окружности – хорды *BC* и BC_1 на таком же расстоянии от центра O_1. Так как $DA = DA_1 = BC = BC_1$ и ∠*BAD* = ∠*BCD* (вписанные углы в равных окружностях, опирающиеся на равные дуги), то *ABCD* – искомый четырехугольник.

В приведенных примерах ABCD – выпуклый четырехугольник. В первом примере это

Рис. 2б

обеспечивается выбором треугольника ABC: достаточно рассмотреть треугольник, у которого основание не меньше боковой стороны (в частности, равносторонний). Во втором примере очевидно, что всегда можно выбрать хорды DA и BC так, чтобы ABCD был выпуклым.

2.3. (***7 баллов***) Варианты второго тура математической регаты готовились так: на каждый лист печаталось несколько одинаковых условий и затем каждый лист разрезался. Получилось так, что количество подготовленных условий совпало с количеством команд. Сколько команд могло участвовать в регате, если сделано p^2 разрезов, где p – простое число?

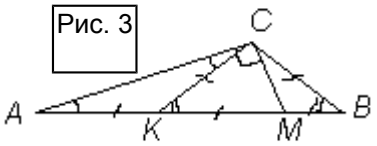
Так как каждый лист разрезался на одинаковое количество частей, то оно должно быть делителем p^2. Число p^2 имеет ровно три делителя: 1, p и p^2. В первом случае каждый лист разрезался на две части, то есть количество команд равно $2p^2$; во втором случае – на $(p + 1)$ часть, то есть команд было $(p + 1)p$; в третьем случае, один лист разрезался на $p^2 + 1$ часть, значит, было $p^2 + 1$ команд. Ответ: $p^2 + 1$ или $2p^2$ или $(p + 1)p$.

3.1. (***8 баллов***) Найдите все натуральные значения n, для которых число $n^5 + n + 1$ является простым.

Разложим данное выражение на множители: $n^5 + n + 1 = (n^5 - n^2) + (n^2 + n + 1) = n^2(n - 1)(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$. Данное число будет простым тогда и только тогда, когда один из полученных множителей равен 1, а другой множитель – простое число. Так как $n^2 + n + 1 \geq 3$ при всех натуральных значениях n, то $n^3 - n^2 + 1 = 1$, то есть, $n^2(n - 1) = 0$. Это уравнение в натуральных числах имеет единственное решение: $n = 1$. При этом значении n первый множитель равен 3. Ответ: $n = 1$.

3.2. (***8 баллов***) В треугольнике *ABC*: ∠*A* = 15°, ∠*B* = 30°. Через точку *C* проведен перпендикуляр к *AC*, который пересекает сторону *AB* в точке *M*. Найдите *BC* , если *AM* = 5.

Рис. 3



Проведем *CK* – медиану прямоугольного треугольника *CAM* (см. рис. 3). Так как ∠*CKB* – внешний для равнобедренного треугольника *ACK*, то ∠*CKB* = 30° = ∠*CBK*. То есть *CB* = *CK* = 0,5*AM* = 2,5. Ответ: 2,5.

3.3. (***8 баллов***) Из квадрата со стороной 5 клеток вырезали одну клетку, после чего его разрезали на 8 одинаковых прямоугольников размером 3×1. Какую клетку изначально вырезали из квадрата?

Несложно заметить, что центральная клетка квадрата могла быть вырезана (см. рис. 4а). Докажем, что никакая другая клетка не могла быть вырезана. Для этого, раскрасим квадрат в три цвета, используя «диагональную» раскраску (см. рис. 4б). Получим 9 белых, 8 серых и 8 черных клеток. Любой прямоугольник размером 3×1, независимо от его расположения, будет содержать клетки трех цветов, поэтому вырезанной может оказаться только белая клетка. Для того, чтобы показать, что остальные белые клетки не являются решением задачи, еще раз используем «диагональную» раскраску, «повернув» квадрат на 90° (см. рис. 4в). В этом случае, количество клеток каждого цвета не изменится, значит, вырезанной по прежнему может быть только белая клетка, но единственной белой клеткой, сохранившей свой цвет, является центральная. Ответ: изначально вырезали центральную клетку.

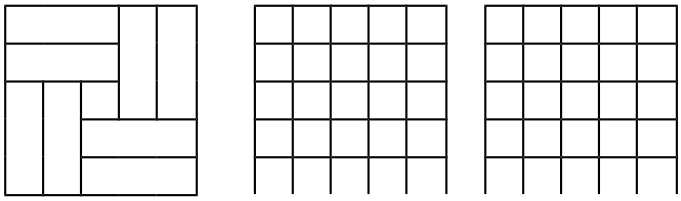
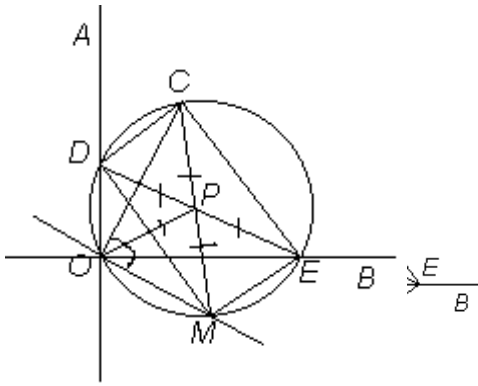


Рис. 4а Рис. 4б Рис. 4в

4.1. (***9 баллов***) Найдите наибольшее возможное значение выражения: $20x-4y+6z-2x^2-4y^2-3z^2-2$. При каких значениях переменных оно достигается?

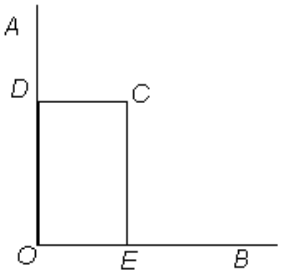
Преобразуем данное выражение: $20x-4y+6z-2x^2-4y^2-3z^2-2$ = $(-2x^2+20x)-(4y^2+4y)-(3z^2-6z)-2$ = $-2(x^2-10x+25-25)-(4y^2+4y+1-1)-3(z^2-2z+1-1)-2$ = $-2(x-5)^2+50-(2y+1)^2+1-3(z-1)^2+3-2$ = $52-2(x-5)^2-(2y+1)^2-3(z-1)^2$. Так как $2(x-5)^2\geq 0$, $(2y+1)^2\geq 0$ и $3(z-1)^2\geq 0$, то наибольшее возможное значение выражения равно 52. Оно достигается при $x=5$, $y=-0{,}5$ и $z=1$. Ответ: 52; при $x=5$, $y=-0{,}5$ и $z=1$.

4.2. (***9 баллов***) Даны две перпендикулярные прямые и точка *C*, не принадлежащая ни одной из них. Рассмотрим все прямоугольники *CDME* такие, что вершина *D* лежит на одной из данных прямых, а вершина *E* – на другой. Найдите геометрическое место точек *M*.



Пусть *O* – точка пересечения данных прямых. Рассмотрим один из прямоугольников, описанных в условии, и проведем его диагонали (см. рис. 5а). Соединим точку *O* отрезками с точками *C*, *M* и *P*. Так как *OP* – медиана прямоугольного треугольника *DOE*, то *OP* = 0,5*DE.* Диагонали *DE* и *CM* прямоугольника *CDME* равны, следовательно, *OP* = 0,5*CM*, значит, ΔCOM – прямоугольный с прямым углом *COM.* Таким образом доказано, что если *M* – вершина данного прямоугольника, то она лежит на прямой, перпендикулярной к *OC* и проходящей через точку *O*.

Рис. 5в Рис. 5б



Докажем, что любая точка *M* этой прямой является вершиной одного из прямоугольников. Построим окружность с диаметром *CM*, центром которой является точка *P*. Так как $\angle COM$ = 90°, то эта окружность пройдет через точку *O*, а так как расстояние от *P* до каждой из данных прямых меньше, чем *PO*, то она пересечет данные прямые в точках *D* и *E* соответственно. *DE*

также является диаметром построенной окружности, так как $\angle DOE$ = 90°. Таким образом, *CDME* – параллелограмм, вписанный в окружность, следовательно, *CDME* – прямоугольник.

Если точки *M* и *O* – совпадают, то искомым является прямоугольник, стороны *CD* и *CE* которого соответственно перпендикулярны прямым *OA* и *OB* (см. рис. 5в).

Ответ: прямая, проходящая через точку *O* пересечения данных прямых, и перпендикулярная прямой *OC.*

4.3. (***9 баллов***) Существует ли такое натуральное число, которое при умножении его на 2 станет квадратом натурального числа, при умножении его на 3 – кубом какого-то натурального числа, после его умножения на 5 – пятой степенью какого-нибудь натурального числа, а после его умножения на 7 – седьмой степенью какого-либо натурального числа?

Заметим, что если $N = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot p_k^{\omega}$ (то есть число *N* разложено на простые множители), то для того, чтобы оно являлось квадратом натурального числа необходимо и достаточно, чтобы каждое из чисел α, β, ..., ω было кратно двум. Аналогично, для того, чтобы число *N* являлось кубом натурального числа, необходимо и достаточно, чтобы каждый из этих показателей степеней был кратен трем, и т. д. Поэтому, чтобы привести пример числа *N*, удовлетворяющего условию задачи, заметим, что в его разложение на простые множители обязаны входить числа 2, 3, 5 и 7, то есть $N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 7^{\lambda}$. Подберем показатели степеней так, чтобы выполнялись все данные условия. Число α должно быть кратно трем, пяти и семи, а при делении на 2 давать остаток 1, например, α = 3×5×7 = 105. Аналогично, число β должно быть кратно двум, пяти и семи, а при делении на 3 давать остаток 2, например, β = 2×5×7×2 = 140. Рассуждая аналогичным образом, можно получить, что γ = 2×3×7×2 = 84; λ = 2×3×5×3 = 90. Ответ: существует, например: $2^{105} \times 3^{140} \times 5^{84} \times 7^{90}$.

Заметим, что указанное число является наименьшим из возможных. Для того чтобы найти общий вид всех таких чисел, необходимо записать показатели степеней в виде: α = 2*k* – 1; β = 3*m* – 2; γ = *5n – 4; λ = 7p – 6 и решить в натуральных числах уравнения:* 2*k* – 1 = *105x;* 3*m* – 2 = 70*y; 5n – 4 = 42z и 7p – 6 = 30t. Остальные простые множители могут входить в разложение искомых чисел с показателями степеней, кратными 2×3×5×7 = 210.*