8 класс

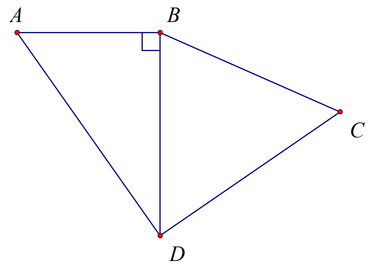
Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Вычислите (*не используя микрокалькулятор*): $\sqrt{2009\cdot 2011+1}$.

Ответ: 2010.

$\sqrt{2009\cdot 2011+1} = \sqrt{(2010-1)\cdot(2010+1)+1} = \sqrt{2010^2-1+1} = \sqrt{2010^2} = 2010.$

1.2. Определите вид четырехугольника, в котором каждая диагональ разбивает его на два прямоугольных треугольника. Ответ объясните.



Ответ: прямоугольник.

Пусть *ABCD* – искомый четырехугольник (см. рис. 1). Рассмотрим одну из его диагоналей, например, *BD.* По условию, треугольник *ABD* – прямоугольный. Докажем, что прямым может быть только угол с вершиной *A*.

Действительно, если, например, угол *ABD* – прямой, то угол *ABC* – тупой, что противоречит условию, так как треугольник *ABC* – уже не прямоугольный.

Рис. 1

Аналогично, в любом из треугольников, получающихся при разбиении, прямой угол лежит напротив диагонали четырехугольника. Следовательно, вершинами прямых углов являются вершины четырехугольника, то есть *ABCD* – прямоугольник.

1.3. С полудня до полуночи Кот Ученый спит под дубом, а с полуночи до полудня рассказывает сказки. На дубе он повесил плакат: «Через час я буду делать то же самое, что делал два часа назад». Сколько часов в сутки эта надпись верна?

Ответ: 18 часов.

Выясним промежутки времени, в которые надпись неверна. Они начинаются за час до того момента, когда Кот меняет вид деятельности, и продолжаются еще 2 часа после этого момента. Таким образом, надпись неверна с 11 до 14 часов и с 23 часов до 2 часов, то есть 6 часов в сутки. В остальное время надпись верна, значит, она верна 18 часов в сутки.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Найдите предпоследнюю цифру в десятичной записи числа $S = 2009^{2008} + 2009^{2009}$.

Ответ: 1.

1) Так как $2009^{2008} + 2009^{2009} = 2009^{2008}(1 + 2009) = 2009^{2008}\times 2010 = 2009^{2008}\times 2000 + 2009^{2008}\times 10$, то предпоследняя цифра числа *S* совпадает с последней цифрой числа 2009^{2008}.

2) Последняя цифра числа 2009^{2008} совпадает с последней цифрой числа 9^{2008}. Так как $9^{2008} = 81^{1004}$, то последняя цифра этого числа – 1.

Следовательно, предпоследняя цифра числа *S* – 1.

2.2. В треугольнике *ABC* длины сторон попарно различны. На сторонах *AB* и *AC* угла *BAC* выбираются точки *M* и *N* соответственно так, что *AM* = *AC* и *AN* = *AB*. Отрезок *MN* пересекается со стороной *BC* в точке A_1. Аналогично, на сторонах угла *ABC* выбираются точки *K* и *L* так, что *BK* = *BC* и *BL* = *BA*, B_1 – точка пересечения *KL* и *AC*. Точка C_1 на стороне *AB* также определяется аналогично. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

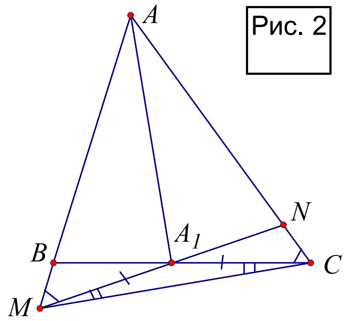


Рис. 2

Из условия задачи следует, что $\Delta AMN = \Delta ACB$ (*AM* = *AC*, *AN* = *AB,* угол *A* – общий, см. рис. 2), следовательно, $\angle AMN = \angle ACB$. Кроме того, из равнобедренного треугольника *AMC* получим, что $\angle AMC = \angle ACM$. Следовательно, $\angle A_1MC = \angle A_1CM$, значит, треугольник A_1CM – также равнобедренный: $MA_1 = CA_1$ Тогда $\Delta AMA_1 = \Delta ACA_1$ (по трем сторонам), откуда следует, что $\angle BAA_1 = \angle CAA_1$, то есть AA_1 – биссектриса угла *CAB*. Аналогично доказывается, что BB_1 и CC_1 – также биссектрисы треугольника *ABC*. Следовательно, эти три отрезка пересекаются в одной точке (*центре окружности, вписанной в треугольник ABC*).

Отметим, что по сути приведенное рассуждение показывает, что прямая AA_1 является осью симметрии угла BAC.

2.3. Имеются три слитка с массами 1, 2 и 3 кг. Процентные содержания золота в разных слитках – различны (но неизвестны). Каждый слиток надо разделить на три части и изготовить из них три новых слитка с теми же массами 1, 2 и 3 кг так, чтобы процентное содержание золота во всех новых слитках стало бы одинаковым (независимо от того, каким оно было в исходных кусках). Объясните, как это можно сделать.

Ответ: каждый слиток можно разделить в отношении 1 : 2 : 3 и сплавить вместе меньшие части кусков, средние и большие.

Суммарная масса кусков – 6 кг. Так как масса первого сплава составляет $\frac{1}{6}$ часть от этой суммы, масса второго сплава – $\frac{1}{3}$ часть, а масса третьего сплава – $\frac{1}{2}$, то новые слитки будут иметь требуемые массы.

Объяснить, почему содержание золота в новых слитках станет одинаковым, можно по-разному.

Первый способ («арифметический»). Массы второго и третьего сплавов больше, чем масса первого сплава, в 2 и в 3 раза соответственно. При этом во второй сплав из каждого первоначального слитка взято в 2 раза больше золота, чем в первый сплав, а в третий сплав из каждого слитка взято в 3 раза больше золота, чем в первый.

Второй способ («алгебраический»). Пусть доля золота в первом слитке равна *x*, во втором – *y*, а в третьем – *z*. Тогда в сплаве, состоящем из меньших кусков, содержание золота равно: $\frac{\frac{1}{6}\times 1\times x+\frac{1}{6}\times 2\times y+\frac{1}{6}\times 3\times z}{1}=\frac{x+2y+3z}{6}$. В сплаве, состоящем из средних кусков, содержание золота равно: $\frac{\frac{1}{3}\times 1\times x+\frac{1}{3}\times 2\times y+\frac{1}{3}\times 3\times z}{2}=\frac{x+2y+3z}{6}$. В сплаве, состоящем из больших кусков, содержание золота равно: $\frac{\frac{1}{2}\times 1\times x+\frac{1}{2}\times 2\times y+\frac{1}{2}\times 3\times z}{3}=\frac{x+2y+3z}{6}$.

Можно доказать, что способ, приведенный в ответе, – единственный (от школьников это не требуется).

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Разложите число $2^{202} + 1$ на два множителя, каждый из которых не меньше миллиона.

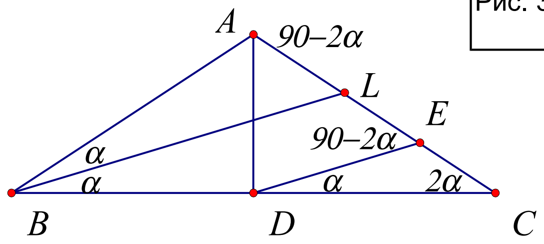
Ответ: $2^{202} + 1 = (2^{101} + 2^{51} + 1)(2^{101} – 2^{51} + 1)$.

Пусть $2^{50} = x$, тогда исходное выражение примет вид $4x^4 + 1$. Разложим на множители это выражение: $4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 – 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 – (2x)^2 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 – 2x + 1)$.

Таким образом, $2^{202} + 1 = (2^{101} + 2^{51} + 1)(2^{101} – 2^{51} + 1)$, что и требовалось, поскольку $2^{101} + 2^{51} + 1 > 2^{101} – 2^{51} + 1 > 2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^2 = 1000000$.

3.2. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *BC* биссектриса *BL* вдвое больше высоты *AD*. Найдите углы треугольника.

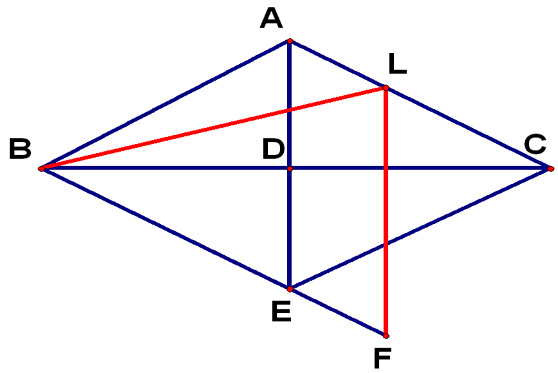
Рис. 3а



Ответ: два угла по 36° и угол 108°.

Первый способ. Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Проведем отрезок *DE* параллельно *BL* (точка *E* – на стороне *AC*, см. рис. 3а). Тогда угол *AED* – внешний для треугольника *EDC*, значит, $\angle AED = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

По теореме Фалеса точка *E* – середина отрезка *CL*, то есть *DE* – средняя линия треугольника *LBC*. Следовательно, $DE = \frac{1}{2}BL = AD$, то есть треугольник *ADE* – равнобедренный. Тогда $\angle AED = \angle EAD = 90° – 2\alpha$.



Таким образом, $90° – 2\alpha. = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 18°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha = 36°$; $\angle BAC = 108°$.

Рис. 3б

Второй способ. Отметим на луче *AD* такую точку *E*, что *ED* = *AD*, тогда *AE* = *BL* (см. рис. 3б). Так как высота *AD* является также и медианой треугольника *ABC*, то получившийся четырехугольник *ABEC* – ромб. Через точку *L* проведем прямую *LF*, параллельную *AE* (*F* – точка ее пересечения с прямой *BF*). По построению, *ALFE* – параллелограмм, следовательно, *LF* = *AE* = *BL*, то есть треугольник *BLF* – равнобедренный.

Пусть $\angle LBC = \alpha$, тогда $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$, $\angle DAC = \angle LFB = \angle LBF = 3\alpha$. Из прямоугольного треугольника *DAC* получим, что $2\alpha + 3\alpha = 90°$, то есть $\alpha = 18°$.

Следовательно, $\angle ABC = \angle ACB = 36°$; $\angle BAC = 108°$.

3.3. После окончания учебного года Миша решил вырвать из своего учебника математики все листы, на каждом из которых сумма номеров страниц (на обеих сторонах листа) является квадратом целого числа, а Гриша собрался удалить все листы, для которых эта же сумма является кубом целого числа. Кто из них нанесет учебнику больший ущерб?

Ответ: если в учебнике не меньше, чем 7 листов, то больший ущерб нанесет Гриша, иначе – ущерба не будет.

На каждом листе одна страница имеет нечетный номер, а другая – четный, причем нечетное число меньше четного. Запишем нечетное число в виде $2n - 1$, тогда четное будет равно $2n$, где n – натуральное число. Сумма номеров страниц на одном листе равна $4n - 1$.

Докажем, что число такого вида (имеющее остаток 3 при делении на 4) не может быть квадратом целого числа. Действительно, если число k – четное, то есть $k = 2m$ (m – целое), то $k^2 = 4m^2$, значит, его квадрат делится на 4 без остатка. Если же число k нечетно, то есть $k = 2m - 1$, то $k^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4(m^2 - m) + 1$, значит, его квадрат имеет остаток 1 при делении на 4.

Таким образом, Миша в любом случае не вырвет из учебника ни одного листа. При этом, $13 + 14 = 27 = 3^3$, то есть если в учебнике – хотя бы 7 листов, то Гриша наверняка сможет вырвать седьмой лист с номерами страниц 13 и 14.

Отметим, что кубы нечетных чисел имеют тот же остаток при делении на 4, что и сами числа, так как $(4m \pm 1)^3 = 64m^3 \pm 48m^2 + 12m \pm 1 = 4(16m^3 \pm 12m^2 + m) \pm 1$. *Поэтому следующий лист учебника, который сможет вырвать Гриша, – восемьдесят шестой, поскольку* $7^3 = 343 = 171 + 172$.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Сравните x и z, если известно, что $x + yzt = y + ztx = z + txy = t + xyz$ и $x > y$, $z > t$.

Ответ: $x = z$.

Первый способ. 1) Преобразуем первое равенство: $x + yzt = y + ztx \Leftrightarrow x - y = zt(x - y)$. Так как $x \neq y$, то $zt = 1$.

2) Аналогично, из последнего равенства: $z + txy = t + xyz \Leftrightarrow z - t = xy(z - t)$. Так как $z \neq t$, то $xy = 1$.

3) Поскольку $x > y$ и $xy = 1$, то $0 < y < 1$ или $y < -1$. Аналогично, $z > t$ и $zt = 1$, значит, $0 < t < 1$ или $t < -1$. Следовательно, $yt \neq 1$.

4) Преобразуем еще одно данное равенство: $x + yzt = z + txy \Leftrightarrow (x - z) - yt(x - z) = 0 \Leftrightarrow (x - z)(1 - yt) = 0$. Так как $yt \neq 1$, то $x = z$.

Второй способ (*для тех, кто уже знаком с квадратными уравнениями*). Заметим, что $zt \neq 0$, иначе из первого равенства следует, что $x = y$. Аналогично, $xy \neq 0$, иначе из последнего равенства следует, что $z = t$. Таким образом, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ и $t \neq 0$.

Пусть $x + yzt = y + ztx = z + txy = t + xyz = A$, $xyzt = B$, тогда $\begin{cases} x + \frac{B}{x} = A, \\ y + \frac{B}{y} = A, \\ z + \frac{B}{z} = A, \\ t + \frac{B}{t} = A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - Ax + B = 0, \\ y^2 - Ay + B = 0, \\ z^2 - Az + B = 0, \\ t^2 - At + B = 0. \end{cases}$

Следовательно, числа x, y, z и t являются корнями одного и того же квадратного уравнения $p^2 - Ap + B = 0$. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, а по условию $x > y$ и $z > t$, то $x = z$ и $y = t$.

4.2. В треугольнике *ABC* медиана *AM* равна высоте *BH*. Кроме того, равны углы *MAB* и *HBC*. Докажите, что треугольник *ABC* – равносторонний.

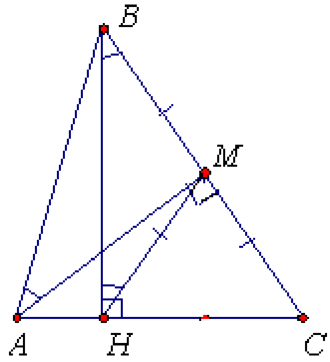


Рис. 4

Из условия задачи следует, что *HM* – медиана прямоугольного треугольника *BCH*, проведенная к гипотенузе, следовательно, $HM = \frac{1}{2}BC = BM$. Тогда треугольник *BMH* – равнобедренный, значит, $\angle MHB = \angle HBC$. Используя также, что $\angle HBC = \angle MAB$ (по условию), получим, что $\angle MHB = \angle MAB$.

Таким образом, отрезок *BM* виден из точек *A* и *H* под одинаковыми углами, поэтому точки *A*, *B*, *M* и *H* лежат на одной окружности. Так как прямой угол *AHB* – вписанный, то *AB* – диаметр этой окружности, тогда вписанный угол *AMB* – также прямой.

Следовательно, медиана *AM* треугольника *ABC* является также и его высотой, поэтому треугольник *ABC* – равнобедренный: *AB* = *AC*. Кроме того, равны прямоугольные треугольники *AMC* и *BHC* (*AM* = *BH*, угол *C* – общий). Следовательно, *AC* = *ÂC*. Таким образом, треугольник *ABC* – равносторонний, что и требовалось.

4.3. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

Ответ: все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

Рассмотрим сначала нечетные числа. Очевидно, что числа 1 и 3 указанным способом представить нельзя. Пусть N – нечетное и $N \geq 5$. Тогда $N = 2k + 1 = k + (k + 1)$, где k – натуральное и $k \geq 2$. Так как любые два последовательных натуральных числа взаимно просты, то все указанные N удовлетворяют условию.

Рассмотрим четные числа. Непосредственной проверкой убеждаемся, что числа 2, 4 и 6 нельзя представить в указанном виде. Остальные четные числа можно разбить на две группы: числа, кратные 4, то есть $N = 4k$, и числа, не кратные 4, то есть $N = 4k + 2$ (k – натуральное и $k \geq 2$).

В первом случае: $N = 4k = (2k + 1) + (2k - 1)$, причем НОД$(2k + 1; 2k - 1)$ = НОД$(2k - 1; 2) = 1$. Во втором случае: $N = 4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1)$, причем НОД$(2k + 3; 2k - 1)$ = НОД$(2k - 1; 4) = 1$.

Для нечетных чисел, начиная с 5, возможно также и другое представление, удовлетворяющее условию: если $k \geq 2$, то $N = 2k + 1 = 2 + (2k - 1)$.