

8 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. Известно, что $a > b$. Можно ли утверждать, что $9b < 10a$? Ответ обоснуйте.

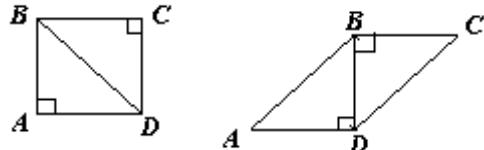
Ответ: нет, нельзя.

Пусть, например, $a = -1$; $b = -1,1$. Тогда $10a = -10$; $9b = -9,9$, то есть $9b > 10a$.

Отметим, что контрпримеры можно подбирать, исходя из следующих соображений. Так как $a > b$, то $9a > 9b$. Для того, чтобы выполнялось неравенство $10a \leq 9b$, надо выбрать $a < 0$. При этом число b должно мало отличаться от числа a .

1.2. Диагональ четырехугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите все возможные значения углов этого четырехугольника.

Ответ: четыре угла по 90° , или два угла по 45° и два угла по 135° , или 45° , 135° и два угла по 90° .



Пусть диагональ BD делит четырехугольник $ABCD$ на равнобедренные прямоугольные треугольники ABD и BCD . Возможны три случая:

1) BD – общая гипотенуза (см. рис. 1а). Тогда $ABCD$ – квадрат, то есть все его углы – прямые.

Рис. 1а

2) BD – общий катет. Тогда либо $ABCD$ – параллелограмм, соседние углы которого 45° и 135° (см. рис. 1б), либо точки A , C и D лежат на одной прямой (см. рис. 1в), то есть $ABCD$ – не четырехугольник.

Рис. 1б

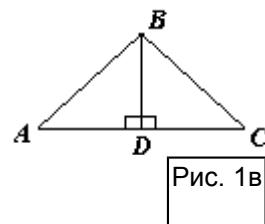


Рис. 1в

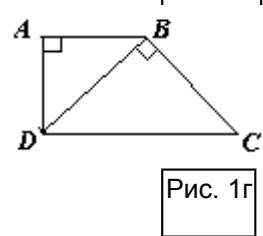


Рис. 1г

3) BD – катет одного треугольника и гипотенуза другого (см. рис. 1г). Тогда $ABCD$ – прямоугольная трапеция. Ее углы, прилежащие к большей боковой стороне, равны 45° и 135° .

1.3. Может ли разность квадратов двух простых чисел быть квадратом простого числа? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет, не может.

Предположим, что существуют такие простые числа m , n и k , что $m^2 - n^2 = k^2$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Запишем равенство в виде: $k^2 = (m - n)(m + n)$. Это означает, что число k^2 делитсяся на каждое из чисел $(m - n)$ и $(m + n)$. Поскольку k – простое число, то это возможно только в том случае, если $m - n = 1$ и $m + n = k^2$.

Существует только одна пара простых чисел, удовлетворяющая первому условию: 3 и 2. Но второму условию она не удовлетворяет, так как 5 не является квадратом натурального числа.

Второй способ. Предположим, что числа m , n и k – нечетные, тогда в левой части равенства стоит четное число, а в правой – нечетное. Поскольку существует единственное четное простое число, то $n = 2$ или $k = 2$. Тогда разность квадратов двух нечетных чисел равна $2^2 = 4$, что невозможно даже в случае, если эти числа – соседние. Действительно, $(2z + 1)^2 - (2z - 1)^2 = 8z > 4$ при любых натуральных значениях z .

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

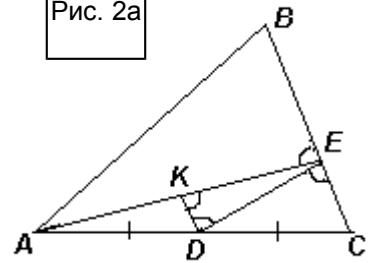
2.1. Для чисел a , b и c выполняются три равенства: $(a + b)(a + b + c) = 5$, $(b + c)(b + c + a) = 6$, $(c + a)(c + a + b) = 7$. Найдите $(a + b + c)^2$.

Ответ: 9.

Сложим данные равенства почленно. Получим: $(a + b + c)(a + b + b + c + c + a) = 18$. Тогда $2(a + b + c)^2 = 18$, то есть $(a + b + c)^2 = 9$.

2.2. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC . На стороне BC выбрана точка E так, что равны углы BEA и CED . Найдите отношение $AE : DE$.

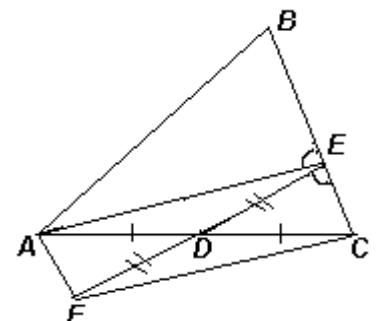
Рис. 2а



Ответ: $AE : DE = 2 : 1$.

Первый способ. Проведем через точку D прямую, параллельную BC , которая пересечет AE в точке K (см. рис. 2а). Тогда $\angle EKD = \angle BEA = \angle CED = \angle EDK$, следовательно, $KE = DE$. Так как D – середина AC , то (по теореме Фалеса) K – середина AE . Таким

Рис. 2б

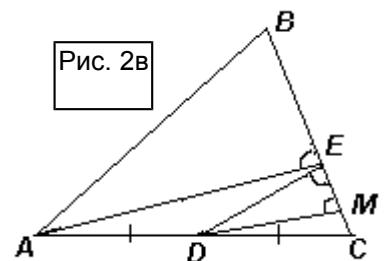


образом, $AE = 2KE = 2DE$.

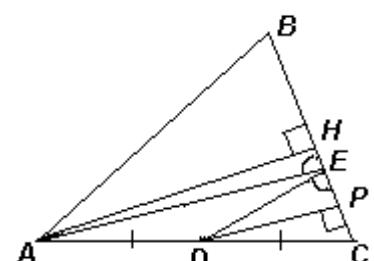
Рис. 2в

Второй способ. Продлим медиану ED треугольника AEC на ее длину: $FD = ED$, тогда $AECF$ – параллелограмм (см. рис. 2б). Так как $BC \parallel AF$, то $\angle EAF = \angle BEA = \angle CED = \angle EFA$, значит, $AE = FE$. Следовательно, $AE = 2DE$.

Рис. 2в



Третий способ. Проведем через точку D прямую, параллельную AE , которая пересечет BC в точке M (см. рис. 2в). Тогда $\angle EID = \angle BEA = \angle DEM$, следовательно, $DE = DM$. Так как D – середина AC , то (по теореме Фалеса) M – середина EC , то есть DM – средняя линия треугольника ACE . Таким образом, $DE = DM = \frac{1}{2} AC$.



Четвертый способ. Проведем из точек D и A перпендикуляры DP и AH к стороне BC (см. рис. 2г). Прямоугольные треугольники AHE и DPE подобны (по двум углам), следовательно, $AE : DE = AH : DP = 2 : 1$, так как DP – средняя линия треугольника ACH (по теореме Фалеса).

Рис. 2г

2.3. Цену на яблоки подняли на 20%. Однако для того, чтобы записать новую цену килограмма яблок, продавцу оказалось достаточным поменять местами цифры числа, записанного на ценнике. Сколько рублей стоили яблоки до их подорожания, если эта цена была меньше 100 рублей?

Ответ: 45 рублей.

Первый способ. Из условия задачи следует, что первоначальная цена яблок выражается двузначным числом, кратным пяти. Так как цифра единиц этого числа не может быть нулем (иначе новая цена будет начинаться с нуля) и при перестановке цифр число должно увеличиться, то достаточно проверить числа 15, 25, 35 и 45. Из этих чисел только 45 при перестановке цифр увеличивается на 20%.

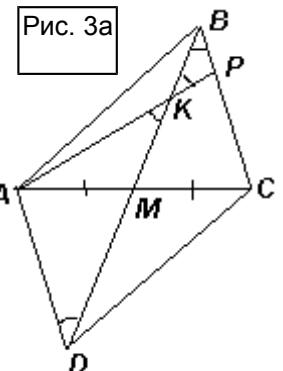
Второй способ. Пусть первоначальная цена яблок – \overline{ab} рублей за килограмм . Тогда новая цена – \overline{ba} рублей. По условию, $\overline{ba} = 1,2\overline{ab}$, то есть $10b + a = 1,2(10a + b)$. Упрощая это равенство, получим, что $4b = 5a$. Так как a и b – натуральные числа, то $a = 4$, $b = 5$.

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

3.1. Известно, что $m^2 + 9mn + n^2$ делится на 11 (числа m и n – целые). Докажите, что $m^2 - n^2$ также делится на 11.

Так как $m^2 + 9mn + n^2$ делится на 11, то $m^2 + 9mn + n^2 - 11mn = m^2 - 2mn + n^2 = (m - n)^2$ также делится на 11. Число 11 – простое, поэтому $m - n$ кратно 11. Следовательно, $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$ также делится на 11.

3.2. На медиане BM треугольника ABC выбрана точка K так, что $AK = BC$. Луч AK пересекает сторону BC в точке P . Докажите, что треугольник BKP – равнобедренный.



Первый способ. Продлим медиану BM на ее длину: $MD = BM$, тогда четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (см. рис. 3а). Так как $AK = BC = AD$, то треугольник DAK – равнобедренный, следовательно, $\angle ADK = \angle AKD$. Так как $\angle PBK = \angle ADK$ и $\angle PKB = \angle AKD$, то в треугольнике BKP $\angle PBK = \angle PKB$, то есть этот треугольник – равнобедренный (с основанием BK).

Второй способ. Продлим отрезок KM на его длину: $ME = KM$, тогда $AKCE$ – параллелограмм (см. рис. 3б). Следовательно, $CE = AK = CB$, то есть треугольник BCE – равнобедренный. Тогда $\angle PBK = \angle CDB = \angle AKD = \angle BKP$, значит, треугольник BKP – равнобедренный.

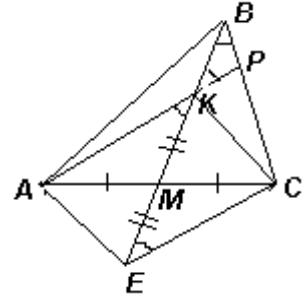


Рис. 3б

3.3. В шахматном турнире каждый участник встречался с каждым один раз (победа – 1 очко, поражение – 0, ничья – пол-очка). Единоличным победителем стал Иванов. Петров сказал: «Можно удалить из турнирной таблицы любого участника и аннулировать очки, набранные во встречах с ним, и тогда единоличным победителем будет уже не Иванов, а кто-нибудь другой». Прав ли Петров? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет, не прав.

Заметим, что при удалении одного участника из таблицы количество очков у любого из оставшихся участников не может увеличиться. Это означает, что смена единоличного победителя происходит только в том случае, когда Иванов из-за выбытия участника потерял хотя бы очко. Следовательно, у выбывшего участника Иванов выиграл.

Предположим, что Петров прав. Тогда Иванов выиграл у каждого участника турнира. Но в этом случае он останется победителем при удалении любого участника, так как все равно наберет максимальное количество возможных очков.

Полученное противоречие показывает, что Петров не прав.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов).

4.1. В нескольких кошельках лежат одинаковые суммы денег. Если бы количество кошельков было на 1% меньше, а денег в каждом кошельке – на копейку больше, то общая сумма денег была бы меньше. А если бы, наоборот, количество кошельков было больше на 1%, а денег в каждом кошельке – на копейку меньше, то общая сумма денег также была бы меньше. Во сколько раз увеличится общая сумма денег, если количество кошельков не менять, но в каждый кошелек добавить по рублю?

Ответ: в 2 раза.

Первый способ («арифметический»). Из первого условия следует, что из каждой сотни кошельков убирается один, а в остальные кошельки добавляется 99 копеек. Поскольку общая сумма денег при этом становится меньше, то в каждом кошельке должно лежать меньше, чем 99 копеек.

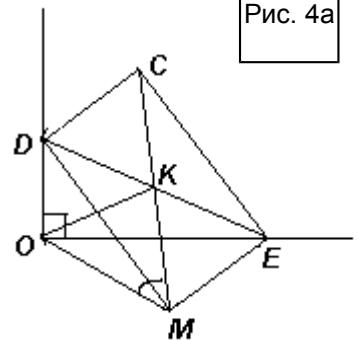
Из второго условия следует, что к каждой сотне кошельков прибавляется один, но сумма денег в этих кошельках уменьшается на 101 копейку. Поскольку общая сумма денег также уменьшится, то в каждом кошельке должно лежать меньше, чем 101 копейка.

Таким образом, в каждом кошельке лежит по 100 копеек, то есть по рублю. Если в каждый кошелек добавить еще по рублю, то количество денег в нем удвоится, значит, удвоится и общая сумма денег.

Второй способ («алгебраический»). Пусть в каждом из n кошельков находится по x копеек, тогда общая сумма денег – nx копеек. Из условия задачи следуют два неравенства: $\frac{99n(x+1)}{100} < nx$ и $\frac{101n(x-1)}{100} < nx$. Из первого неравенства получим, что $x > 99$, а из второго – что $x < 101$. Таким образом, $99 < x < 101$ и x – целое, то есть $x = 100$.

Если в каждый кошелек добавить по рублю, то общая сумма денег станет равна $n(x + 100)$ копеек. При $x = 100$ искомое отношение равно: $\frac{n(x + 100)}{nx} = 2$.

Рис. 4а



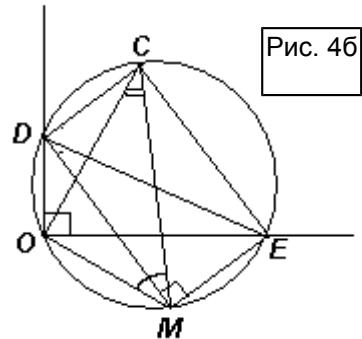
4.2. Дан прямой угол O и точка C внутри него. Рассмотрим такой прямоугольник $CDME$, что точки D и E лежат на сторонах угла. Найдите OM , если диагональ прямоугольника равна 10 см, а $\angle OMC = 60^\circ$.

Ответ: $OM = 5$ см.

Первый способ. Пусть диагонали CM и DE прямоугольника пересекаются в точке K (см. рис. 4а). Тогда $KM = \frac{1}{2} CM = 5$ см, OK – медиана прямоугольного треугольника DOE , проведенная к гипотенузе, значит, $OK = \frac{1}{2} DE = 5$ см.

Таким образом, в треугольнике OKM : $KM = OK$ и $\angle OMK = 60^\circ$, поэтому этот треугольник – равносторонний. Следовательно, $OM = KM = OK = 5$ (см).

Рис. 4б



Второй способ. Рассмотрим окружность, описанную около данного прямоугольника, тогда DE – ее диаметр (см. рис. 4б). Так как угол DOE – прямой, то точка O лежит на этой окружности. Поскольку CM – также диаметр этой окружности, то $\angle COM = 90^\circ$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике COM $\angle OMC = 60^\circ$, то есть $\angle OCM = 30^\circ$. Тогда $OM = \frac{1}{2} CM = 5$ (см).

4.3. Выберем произвольным образом 55 различных натуральных чисел из первой сотни. Докажите, что среди них найдутся два числа, разность между которыми равна 9.

Первый способ. Разобьем все натуральные числа первой сотни на девять групп так, чтобы внутри группы каждое число, начиная со второго, было на 9 больше предыдущего: $(1, 10, \dots, 91, 100); (2, 11, \dots, 83, 92); (3, 12, \dots, 84, 93); \dots; (9, 18, \dots, 90, 99)$.

Если мы выбираем числа, разность между которыми не равна 9, то из каждой группы нельзя брать числа, стоящие рядом. Так как в первой группе 12 чисел, а в остальных – по 11, то из любой группы мы сможем взять не более шести чисел, то есть всего не более 54 чисел. Добавление любого числа обязательно даст пару чисел, разность между которыми равна 9.

Второй способ. Пусть из первой сотни выбраны числа a_1, a_2, \dots, a_{55} . Рассмотрим эти числа вместе с числами, которые получатся, если к каждому из выбранных прибавить по 9, то есть $a_1 + 9, a_2 + 9, \dots, a_{55} + 9$. Получим 110 натуральных чисел, лежащих в диапазоне от 1 до 109. Следовательно (по принципу Дирихле), среди этих чисел найдутся хотя бы два равных числа, то есть для некоторых n и k выполняется равенство: $a_n + 9 = a_k$, что равносильно утверждению задачи.