## 8 класс

### Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

**1.1.** Докажите, что для любых $x$ и $y$ выполняется неравенство: $x^2 - xy + y^2 + x - y + 1 > xy$.

Данное неравенство равносильно неравенству $(x - y)^2 + (x - y) + 1 > 0$. Пусть $a = x - y$, тогда это неравенство примет вид: $a^2 + a + 1 > 0$. Справедливость такого неравенства можно доказать различными способами, например:

1) $a^2 + a + 1 = a^2 + a + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$.

2) Доказываемое неравенство равносильно неравенству $2a^2 + 2a + 2 > 0$, которое выполняется, так как при любых значениях $a$ имеем: $2a^2 + 2a + 2 = (a^2 + 2a + 1) + a^2 + 1 = (a + 1)^2 + a^2 + 1 > 0$.

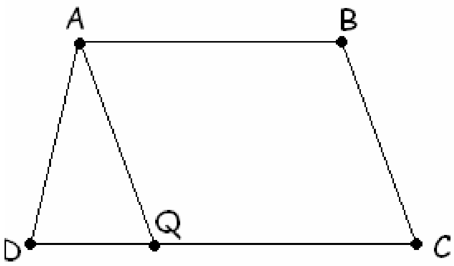
3) При любых значениях $a$ выполняется неравенство $a^2 \geq 0$, поэтому при $a > -1$ справедливость доказываемого неравенства следует из того, что $a + 1 > 0$. При $a \leq -1$ имеем: $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1 > 0$, так как числа $a$ и $a + 1$ одного знака (или одно из них равно нулю).

4) «Ветви» графика квадратичной функции $f(a) = a^2 + a + 1$ направлены вверх, а дискриминант $D = 1 - 4 < 0$, поэтому при любых значениях $a$ выполняется неравенство $f(a) > 0$.

*Последний способ выходит за рамки программы 8 класса.*

**1.2.** Существует ли трапеция, в которой разность длин боковых сторон больше, чем разность длин оснований?

Рис. 1




Ответ: нет, не существует.

Пусть существует трапеция $ABCD$, указанная в условии (см. рис. 1). Через вершину $A$ меньшего основания проведем прямую, параллельную боковой стороне $BC$, которая пересечет основание $CD$ в точке $Q$. Тогда $ABCQ$ – параллелограмм (по определению). Следовательно, $AQ = BC$ и $QC = AB$, значит, $DQ = DC - AB$. Для треугольника $AQD$ должно выполняться неравенство: $AD + DQ > AQ \Leftrightarrow AD + DC - AB > BC \Leftrightarrow DC - AB > BC - AD$. Последнее неравенство противоречит условию задачи, поэтому такой трапеции не существует.

**1.3.** Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов команда получала четыре очка, за ничью – два очка и за поражение – одно. Сумма очков, набранных обеими командами, оказалась равна 46. Сколько было ничьих?

Ответ: 4.

Первый способ. Если в каком-то из видов спорта команды сыграли вничью, то сумма очков, набранных ими за этот вид, равна 4, а при другом результате эта сумма равна 5, то есть в случае ничьей такая сумма на 1 меньше. Если бы ничьих не было вовсе, то сумма очков, набранных обеими командами, была бы равна $5 \times 10 = 50$. В действительности же она на 4 очка меньше. Следовательно, было четыре ничьи.

Второй способ. Пусть ничьих было $n$, тогда результативных встреч было $(10 - n)$. Из условия следует, что $4n + 5(10 - n) = 46 \Leftrightarrow n = 4$.

---

### Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

**2.1.** С дробями разрешается делать две операции: 1) числитель увеличивать на 8, 2) знаменатель увеличивать на 7. Выполнив $n$ указанных операций в произвольном порядке, из дроби $\frac{7}{8}$ получили дробь, ей равную. При каком наименьшем значении *n* это возможно?

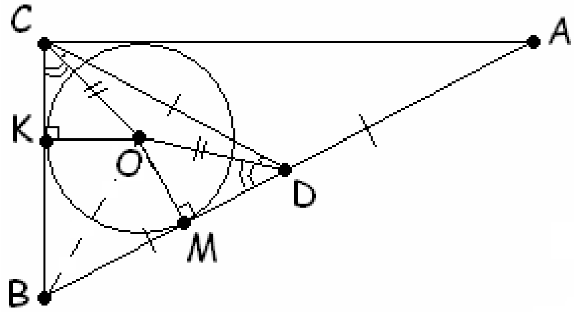
<u>Ответ</u>: при *n* = 113.

Пусть первая операция выполнена *m* раз, а вторая – *k* раз, причем *m* + *k* = *n*. Тогда выполняется равенство: $\frac{7+8m}{8+7k}=\frac{7}{8}$. Преобразовав его, получим, что 64*m* = 49*k*.

Так как числа 64 и 49 – взаимно простые, то из полученного равенства следует, что *m* кратно 49, то есть $m \geq 49$. Аналогично, *k* кратно 64, то есть $k \geq 64$. Таким образом, наименьшее значение *n* = 113 достигается, если *m* = 49, *k* = 64.

**2.2.** В прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности оказался равноудален от вершины прямого угла и середины гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

<u>Ответ</u>: 30° и 60°.




Пусть *D* – середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, *O* – центр окружности, вписанной в этот треугольник, *K* и *M* – точки касания этой окружности с меньшим катетом *BC* и гипотенузой *AB* соответственно (см. рис. 2).

Рис. 2

По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, *CD* = $\frac{1}{2}$ *AB* = *BD*. По условию, *OC* = *OD*, поэтому равны прямоугольные треугольники *OKC* и *OMD* (по катету и гипотенузе). Далее докажем, что *BC* = *BD*. Это можно сделать различными способами.

<u>Первый способ</u>. Из доказанного равенства треугольников следует, что *KC* = *MD*. Кроме того, равны отрезки касательных к окружности *BK* и *BM*. Следовательно, *BC* = *BK* + *KC* = *BM* + *MD* = *BD*.

<u>Второй способ</u>. Из доказанного равенства треугольников следует, что ∠*KCO* = ∠*ÌDO*. Кроме того, треугольник *COD* – равнобедренный, значит ∠*OCD* = ∠*ODC*. Таким образом, ∠*BCD* = ∠*BCO* + ∠*OCD* = ∠*BDO* + ∠*ODC* = ∠*BDC*. Следовательно, *BC* = *BD*.

Таким образом получим, что треугольник *BCD* – равносторонний, то есть ∠*CBA* = 60°, тогда ∠*CAB* = 30°.

*Отметим, что при доказательстве равенства BC = BD можно обойтись и без равенства прямоугольных треугольников OKC и OMD. А именно, можно сразу рассмотреть треугольники BOC и BOD, в которых OC = OD, OB – общая сторона, и равны острые углы OBC и OBD, лежащие напротив равных сторон. Следовательно, углы BCO и BDO либо равны, либо их сумма равна 180° (так называемый «четвертый признак равенства треугольников»). В рассматриваемой ситуации второй случай невозможен, так как оба угла – острые. Тогда ΔOBC = ΔOBD, следовательно, BC = BD.*

*Отметим также, что в приведенной конфигурации можно вычислить все углы, отмеченные на чертеже, так как треугольники OKC и OMD не только прямоугольные, но и равнобедренные. Поэтому ∠KCO = ∠ÌDO = 45°, ∠OCD = ∠ODC = 15°.*

**2.3.** В клетках таблицы 11×11 расставлены плюсы и минусы. Известно, что в каждой из 11 строк плюсов больше, чем минусов. Докажите, что хотя бы в двух столбцах плюсов также больше, чем минусов.

Первый способ. По условию, в каждой строке больше плюсов, чем минусов. Значит, в каждой строке не менее, чем 6 плюсов, и общее количество плюсов не менее, чем $6\times11 = 66$.

Пусть не найдется двух столбцов, в которых плюсов больше, чем минусов, тогда найдутся 10 столбцов, в каждом из которых не больше, чем 5 плюсов. Значит, в этих столбцах не более, чем $5\times10 = 50$ плюсов, поэтому в оставшемся столбце должно быть не менее, чем 66 – 50 = 16 плюсов. Но в столбце лишь 11 клеток – противоречие.

Второй способ. Пусть общее количество плюсов в таблице равно $p$, а общее количество минусов равно $m$. Так как в каждой строке плюсов больше, чем минусов, то $p - m \geq 11$. Пусть не найдется двух столбцов, в которых плюсов больше, чем минусов, тогда $m - p' \geq 10$, где $p'$ – количество плюсов в тех десяти столбцах, в которых плюсов меньше, чем минусов. Еще в одном столбце не может быть более 11 плюсов, поэтому $p' + 11 \geq p$.

Сложим почленно три записанных неравенства, тогда $p + 11 \geq p + 21$ – противоречие.

---

**Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).**

**3.1.** В кинофильме «Самогонщики» три друга гонят самогон. У Труса течёт жидкость крепостью $a$% и стандартная бутыль наполняется за $a$ часов, у Балбеса течёт жидкость крепостью $b$% и такая же бутыль наполняется за $b$ часов, а у Бывалого – $c$% и за $c$ часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутыль и наполнили её за сутки. Найдите крепость получившейся смеси. (*Крепость жидкости – это процент содержания в ней спирта*).

Ответ: 72%.

Первый способ («арифметический»). Представим себе, что из трубок течет чистый спирт, а дополнение его водой происходит отдельно. Из условия задачи следует, что каждый из самогонных аппаратов Труса, Балбеса и Бывалого закачивает за 1 час количество спирта, позволяющее повысить его итоговое содержание на 1%. Таким образом, крепость получающейся смеси растет на 3% в час, поэтому за 24 часа (после добавления воды) получится жидкость, крепостью 72%.

Второй способ («алгебраический»). Самогонный аппарат Труса наполняет за час $\frac{1}{a}$ часть бутыли, Балбеса – $\frac{1}{b}$ часть бутыли, а Бывалого – $\frac{1}{c}$ часть бутыли. Поскольку вся бутыль наполнилась за сутки, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ составляет $\frac{1}{24}$ часть бутыли. При этом в жидкости, выработанной за 1 час, спирт будет составлять $\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{100}+\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{100}+\frac{1}{c}\cdot\frac{c}{100}=\frac{3}{100}$ от всей бутыли. Следовательно, в итоговом продукте содержание спирта составит $\frac{3}{100}:\frac{1}{24}=\frac{72}{100}$ части бутыли, то есть крепость получившейся смеси равна 72%.

*Отметим, что если не учитывать условие, что втроём друзья наполнили бутыль ЗА СУТКИ, то получим ответ* $\frac{3}{100}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot100$ = $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$ *(%). В тех случаях, когда a, b и c связаны условием* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ = $\frac{1}{24}$*, это выражение приводит к ответу 72%.*

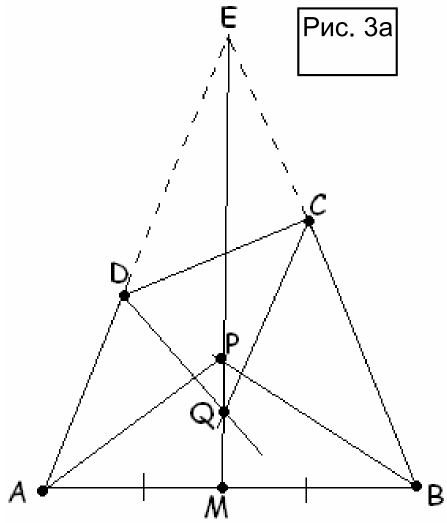
**3.2.** Биссектрисы углов $A$ и $B$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а биссектрисы углов $C$ и $D$ пересекаются в точке $Q$ (точки $Q$ и $P$ различны). Прямая $PQ$ проходит через середину стороны $AB$. Найдите угол $DAB$, если $\angle ABC = \alpha$.

Ответ: $\alpha$ или $180° - \alpha$.

Так как точка $P$ принадлежит биссектрисе угла $ABC$, то она равноудалена от его сторон, то есть от прямых $BA$ и $BC$, на которых лежат стороны четырехугольника $ABCD$. Точка $P$ лежит также и на биссектрисе угла $DAB$, поэтому она равноудалена от прямых $AB$

и $AD$ (см. рис. 3 а, б). Таким образом, точка $P$ равноудалена от прямых $AD$ и $BC$. Аналогично доказывается, что точка $Q$ также равноудалена от прямых $AD$ и $BC$.

Пусть $M$ – середина стороны $AB$. Возможны два случая.

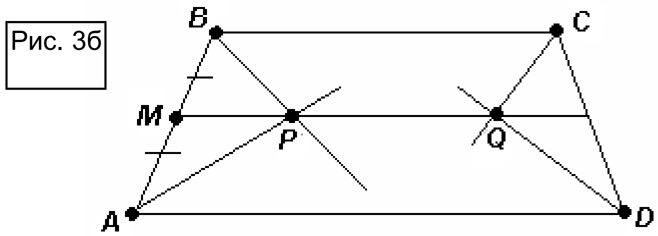



1) Прямые $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $E$. Тогда точки $P$ и $Q$ лежат на биссектрисе угла $AEB$ (см. рис. 3а). По условию, прямая $PQ$ проходит через точку $M$, поэтому отрезок $EM$ является биссектрисой и медианой треугольника $AEB$, значит, этот треугольник равнобедренный, то есть $\angle DAB = \angle ABC = \alpha$.

*В случае, когда точка E лежит в другой полуплоскости относительно прямой AB, DAB и ABC – углы, смежные равным углам.*

2) Прямые $AD$ и $BC$ параллельны (см. рис. 3б).

В этом случае, $ABCD$ – параллелограмм или трапеция. Точки $P$ и $Q$ равноудалены от прямых $AD$ и $BC$ (по доказанному выше), поэтому прямая $PQ$ проходит через середины сторон $AB$ и $CD$. Тогда $\angle DAB = 180° - \angle ABC = 180° - \alpha$.




**3.3.** Является ли квадратом какого-нибудь натурального числа произведение первых 2007 простых чисел, увеличенное на 1?

Ответ: нет, не является.

Первый способ. Все простые числа, кроме числа 2, нечётны. Поэтому произведение первых 2007 простых чисел равно нечётному числу, умноженному на 2. Значит, при делении на 4 это произведение даёт остаток 2. После прибавления единицы остаток от деления на 4 станет равен 3.

Докажем, что квадрат натурального числа не может иметь остаток 3 при делении на 4. Действительно, если $m$ – чётное число, то $m^2$ делится на 4, а если $m$ – нечётное число, то оно имеет вид: $m = 4n \pm 1$, где $n$ – натуральное. Тогда $m^2 = 16n^2 \pm 8n + 1$, то есть $m^2$ при делении на 4 даёт остаток 1. Таким образом, при делении квадрата натурального числа на 4 могут получаться только остатки 0 или 1.

Второй способ. Пусть $N$ – произведение первых 2007 простых чисел и нашлось такое натуральное число $m$, что $m^2 = N + 1$. Тогда $N = (m - 1)(m + 1)$.

Заметим, что множители в правой части этого равенства имеют одинаковую чётность. Так как $N$ содержит множитель 2, то $N$ – чётное число, следовательно числа $m - 1$ и $m + 1$ также чётные, поэтому и число $N$ должно делится на 4, что невозможно.

---

**Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).**

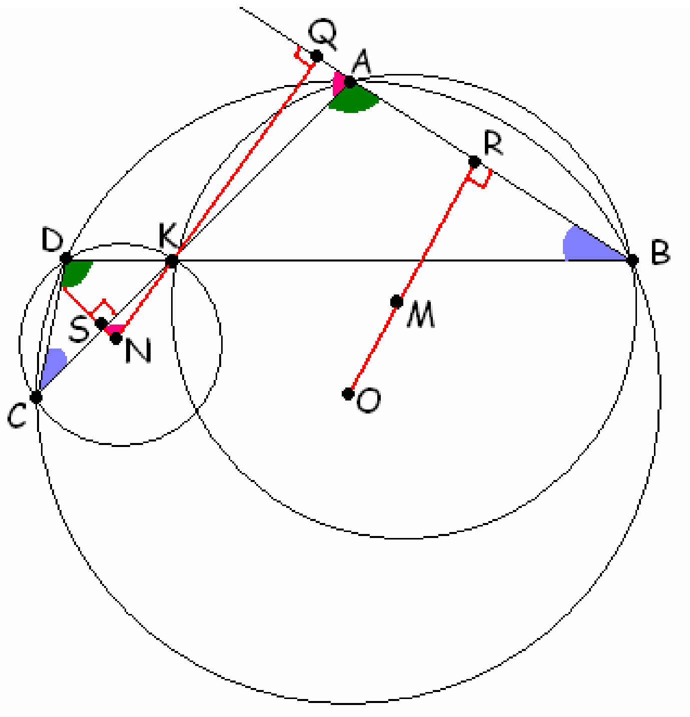
**4.1.** Рассматриваются все квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами такие, что $p + q = 218$. Сколько таких уравнений имеют целые корни?

Ответ: 4 уравнения.

Пусть данное уравнение имеет целые корни $m$ и $n$, причем $m \ge n$. Тогда, по теореме Виета, $m + n = -p$; $mn = q$. По условию, $p + q = 218$, поэтому $-m - n + mn = 218 \Leftrightarrow mn - m - n + 1 = 219 \Leftrightarrow m(n - 1) - (n - 1) = 219 \Leftrightarrow (m - 1)(n - 1) = 73 \times 3$.

Так как в левой части полученного равенства записано произведение двух целых чисел, и $m - 1 \ge n - 1$, то возможны четыре варианта: $\begin{cases} m-1=73 \\ n-1=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=-3 \\ n-1=-73 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=219 \\ n-1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} m-1=-1 \\ n-1=-219 \end{cases}$. Следовательно, $\begin{cases} m=74 \\ n=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=-2 \\ n=-72 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=220 \\ n=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} m=0 \\ n=-218 \end{cases}$.

Каждая найденная пара корней определяет ровно одно уравнение, удовлетворяющее условию задачи.



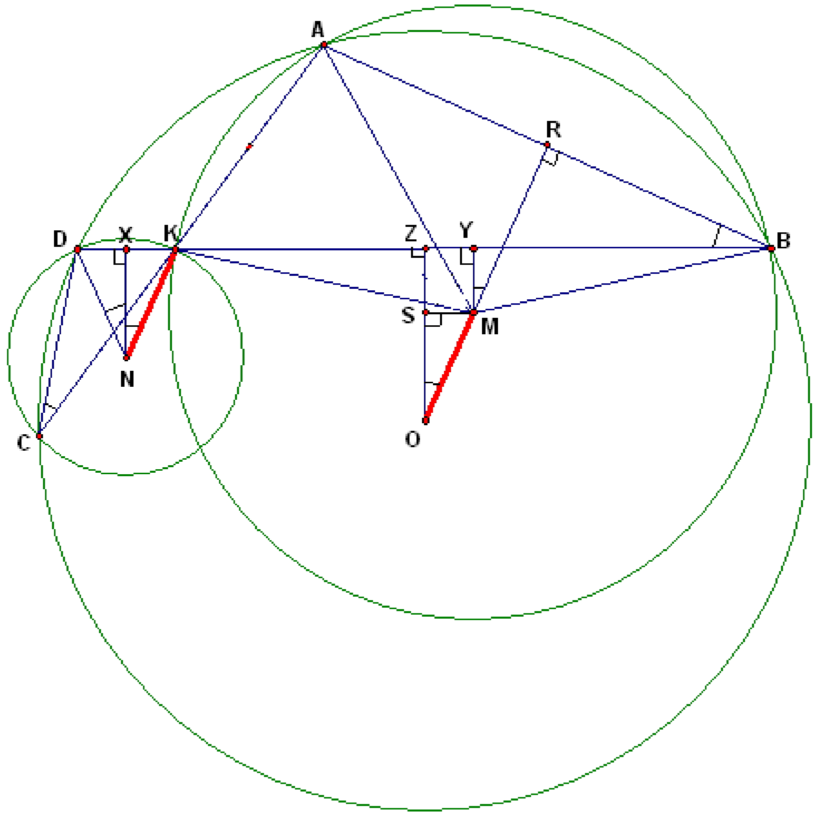

**4.2.** Хорды $AC$ и $BD$ окружности с центром $O$ пересекаются в точке $K$. $M$ и $N$ – центры окружностей, описанных около треугольников $ABK$ и $CDK$ соответственно. Докажите, что $OM = KN$.

Так как $AB$ является общей хордой окружностей с центрами $O$ и $M$, то прямая $OM$ ей перпендикулярна (см. рис. 4 а, б).

Первый способ. Докажем, что прямая $KN$ также перпендикулярна прямой $AB$.

Действительно, пусть прямые $KN$ и $AB$ пересекаются в точке $Q$ (см. рис. 4а). Тогда $\angle QAK = 180° - \angle BA\tilde{N} = 180° - \angle \tilde{N}DB$, так как вписанные углы $BA\tilde{N}$ и $\tilde{N}DB$ опираются на одну и ту же дугу окружности с центром $O$. Проведем перпендикуляр $NS$ к хорде $CK$. Тогда угол $\angle SNK = \frac{1}{2}\angle \tilde{N}NK = 180° - \angle \tilde{N}DB$, так как угол $\tilde{N}DB$, вписанный в окружность с центром $N$ дополняет половину центрального угла $\tilde{N}NK$ до 180°. Таким образом, $\angle SNK = \angle QAK$, поэтому $\angle KQA = 180° - (\angle QAK + \angle AKQ) = 180° - (\angle SNK + \angle NKS) = \angle KSN = 90°$.

Рис. 4а




Из того, что $KN \perp AB$ и $MO \perp AB$, следует, что прямые $MO$ и $KN$ параллельны. Аналогичным образом доказывается, что прямая $ON$ параллельна прямой $MK$. Значит, $OMNK$ – параллелограмм, следовательно равны его противоположные стороны, то есть $KN = OM$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть $X$, $Y$ и $Z$ – основания перпендикуляров, опущенных из точек $N$, $M$ и $O$ соответственно на хорду $BD$ (см. рис. 4б). Тогда, так как $X$, $Y$ и $Z$ – середины отрезков $DK$, $BK$ и $BD$ соответственно, то $XK = \frac{1}{2}DK = \frac{1}{2}(BD - BK) = BZ - BY = ZY$.

Рис. 4б

Пусть $S$ и $R$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на отрезки $OZ$ и $AB$ соответственно. Тогда $MSZY$ – прямоугольник, поэтому $SM = ZY$.

Кроме того, используя свойства вписанных и центральных углов, получим: $\angle XNK = \frac{1}{2}\angle DNK = \angle DCK = \angle DCA = \angle DBA$. Углы $SOM$ и $DBA$ – острые и их стороны соответственно перпендикулярны, поэтому, $\angle SOM = \angle DBA$.

Таким образом, $\angle XNK = \angle SOM$ и $XK = SM$, следовательно равны прямоугольные треугольники $XNK$ и $SOM$. Значит, $KN = OM$, что и требовалось доказать.

**4.3.** На листе клетчатой бумаги в узлах сетки поставили пять точек и каждые две из них соединили отрезком. Могло ли получиться так, что ни один из этих отрезков не содержит внутри себя какого-нибудь из узлов сетки?

Ответ: нет, не могло.

Введём декартову систему координат на плоскости так, чтобы координатные оси проходили по линиям сетки и единичный отрезок был равен стороне клетки. В такой системе координат каждый узел сетки является точкой с целочисленными координатами, и наоборот, любая точка с целочисленными координатами является узлом сетки.

Пусть *Ч* означает, что координата чётна, а *Н* – что она нечётна. Тогда для узлов сетки возможны ровно четыре комбинации чётностей первой и второй координат: (*Ч*; *Ч*), (*Н*; *Ч*), (*Ч*; *Н*) и (*Н*; *Н*).

Следовательно, по принципу Дирихле, среди пяти отмеченных точек найдутся хотя бы две точки $X(x_1;\ x_2)$ и $Y(y_1;\ y_2)$, у которых соответствующие координаты одинаковой чётности. Пусть $C$ – середина отрезка $XY$, тогда $C\left(\frac{x_1+y_1}{2};\ \frac{x_2+y_2}{2}\right)$. Так как числа $x_1$ и $y_1$, $x_2$ и $y_2$ имеют одинаковую чётность, то обе координаты точки $C$ – целые числа.

Таким образом, внутри отрезка $XY$ есть узел сетки.