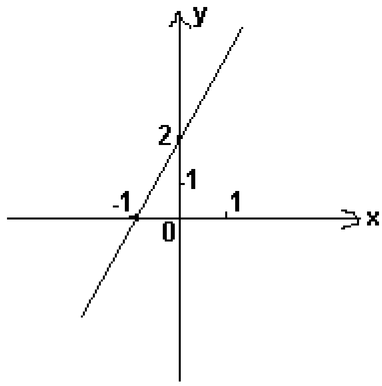
8 класс



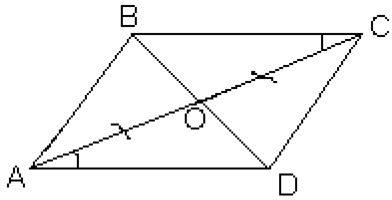
1.1. (***6 баллов***) Дан график линейной функции $y = ax + b$ (см. рисунок). Найдите значение выражения $b - a$.

Ответ: 0.

Заметим, что значение выражения $b - a$ является значением данной функции при $x = -1$. Из графика видно, что это значение равно нулю.

Возможен также более громоздкий способ решения: вычислить значения коэффициентов a и b, подставив в уравнение, задающее функцию, координаты любых двух точек графика.

1.2. (***6 баллов***) О четырехугольнике известно, что две его стороны параллельны и что точка пересечения диагоналей является серединой одной из диагоналей. Верно ли, что этот четырехугольник – параллелограмм?



Ответ: да, верно.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $BC \parallel AD$, O – точка пересечения AC и BD, и $AO = OC$ (см. рис. 1). Так как $BC \parallel AD$, то $\angle OCB = \angle OAD$, кроме того, $\angle COB = \angle AOD$. Следовательно, треугольники BOC и AOD равны по стороне и прилежащим углам, поэтому $BC = AD$. Таким образом, стороны BC и AD рассматриваемого четырехугольника равны и параллельны, то есть $ABCD$ – параллелограмм.

Рис. 1

1.3. (***6 баллов***) При умножении натурального числа N на 3 получилось число, сумма цифр которого равна N. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 9.

Получившееся при умножении число делится на 3, поэтому сумма его цифр делится на 3. Значит, число N делится на 3, тогда $3N$ делится на 9. Следовательно, сумма цифр числа $3N$ делится на 9, то есть N делится на 9. Таким образом, $N \geq 9$, причем число 9 удовлетворяет условию: $9 \cdot 3 = 27$ и сумма цифр числа 27 равна 9.

Отметим, что задачу можно решить непосредственным перебором, умножая на 3 числа от 1 до 9 и проверяя их сумму цифр.

2.1. (***7 баллов***) Известно, что $a + b + c + d = 6$. Может ли сумма $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ равняться 18?

Ответ: нет, не может.

Предположим, что указанная сумма равна 18. Из условия следует, что $(a + b + c + d)^2 = 36$. Преобразуем: $(a + b + c + d)^2 = ((a + b) + (c + d))^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd +

cd). Подставив числовые значения, получим, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$, что противоречит условию.

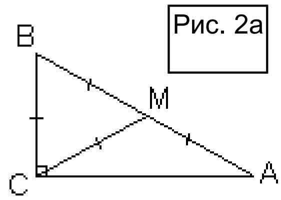


Рис. 2а

2.2. (***7 баллов***) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен одной из медиан. Какой угол образует эта медиана со вторым катетом?

Ответ: 30°.

Рассмотрим треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Возможны два случая: 1) медиана проведена к гипотенузе; 2) медиана проведена к одному из катетов.

1) Пусть медиана *CM* равна, например, катету *BC* (см. рис. 2а). Кроме того, $CM = \frac{1}{2}AB = BM$, поэтому треугольник *BMC* – равносторонний, следовательно, $\angle BCM = 60°$. Значит, искомый угол *ACM* равен 30°.

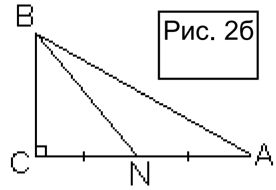


Рис. 2б

2) Пусть *BN* – рассматриваемая медиана (см. рис. 2б). Так как *BN* > *BC*, то остается принять, что *BN* = *AC*. Тогда $CN = \frac{1}{2}BN$, то есть в прямоугольном треугольнике *BCN* $\angle CBN = 30°$. Этот угол – искомый.

2.3. (***7 баллов***) Урфин Джюс выстроил 66 дуболомов в шеренгу, пересчитал их и понял, что перестроить их в колонну по пять ему не удастся. Тогда, он решил между любыми двумя дуболомами, стоящими в шеренге, поставить еще по одному дуболому. Сможет ли он, повторив эту операцию несколько раз, добиться того, чтобы количество дуболомов стало кратным пяти?

Ответ: нет, не сможет.

Заметим, что если в шеренге стоит *n* дуболомов, то в результате указанной операции их станет $2n - 1$. После первой операции количество дуболомов станет равно 131. Если число, оканчивающееся на 1, умножить на 2 и вычесть 1, то снова получится число, оканчивающееся на 1. Поэтому в дальнейшем количество дуболомов всегда оканчивается цифрой 1, следовательно, это число не будет делиться на 5.

3.1. (***8 баллов***) У Пети были монеты достоинством в 1 рубль и 1 копейку, причем копеек было меньше, чем на рубль. Покупая продукты, Петя потратил половину всей суммы. После этого у него снова оказались только рубли и копейки, причем копеек оказалось столько, сколько вначале было рублей, а рублей оказалось вдвое меньше, чем вначале было копеек. Сколько денег было у Пети первоначально?

Ответ: 99 рублей и 98 копеек.

Первый способ. Пусть у Пети было *x* рублей и *y* копеек, тогда общая сумма его денег – $(100x + y)$ копеек. После покупки продуктов у Пети осталась половина этой суммы, то есть $(50x + 0{,}5y)$ копеек. По условию, рублей у Пети стало $0{,}5y$, а копеек – *x*, то есть всего $(50y + x)$ копеек. Составляем уравнение: $50x + 0{,}5y = 50y + x$.

Упростив его, получим: $98x = 99y \Leftrightarrow 98(x - y) = y$. Так как *x* и *y* – натуральные числа, то *y* делится на 98. Но копеек у Пети было меньше, чем на рубль, поэтому $y < 100$, следовательно, $y = 98$, тогда $x = 99$.

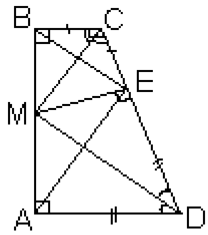
Второй способ. Пусть после покупок у Пети осталось *a* рублей и *b* копеек, тогда сумма его денег вначале была равна 2*a* рублей и 2*b* копеек. Рассмотрим два случая:

1) $b < 50$, тогда $2b < 100$. Из условия следует, что $\begin{cases} b = 2a \\ a = b \end{cases}$, что возможно только при $a = b = 0$.

2) $b \geq 50$, тогда $2b \geq 100$. В этом случае один из рублей, который был у Пети вначале, оказался размененным на копейки, поэтому: $\begin{cases} b = 2a + 1 \\ 2a = 2b - 100 \end{cases}$. Решением этой системы уравнений является: $\begin{cases} b = 99 \\ a = 49 \end{cases}$. Таким образом, у Пети осталось 49 рублей 99 копеек, а было – 99 рублей 98 копеек.

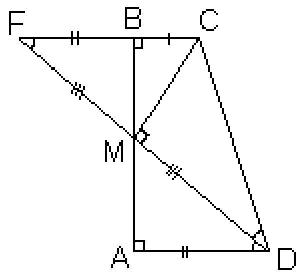
3.2. (***8 баллов***) В четырехугольнике *ABCD* углы *A* и *B* – прямые. Известно также, что *CD* = *AD* + *BC*. Биссектриса угла *ADC* пересекает *AB* в точке *M*. Найдите угол *CMD*.

Ответ: 90°.



Первый способ. Отметим на стороне *CD* точку *E* так, что *BC* = *CE* (см. рис. 3а). Так как *CD* = *AD* + *BC*, то *ED* = *AD*. Треугольники *MDE* и *MDA* равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, ∠*MED* = ∠*MAD* = 90°. (*Заметим, что из этого равенства следует, что точка M лежит на отрезке AB, а не на его продолжении.*) Прямоугольные треугольники *MBC* и *MEC* равны по катету и гипотенузе, следовательно, ∠*BCM* = ∠*ECM*. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то: ∠*C* + ∠*D* = 180°, поэтому ∠*DCM* + ∠*CDM* = $\frac{1}{2}$∠*C* + $\frac{1}{2}$∠*D* = 90°, тогда из треугольника *CMD* получим, что ∠*CMD* = 90°.

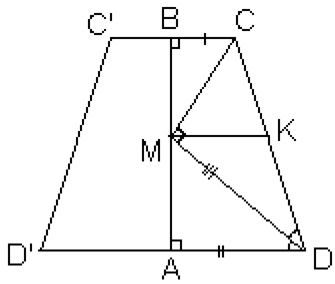
Рис. 3а



Отметим, что этот способ решения не использует в явном виде тот факт, что ABCD является трапецией.

Рис. 3б

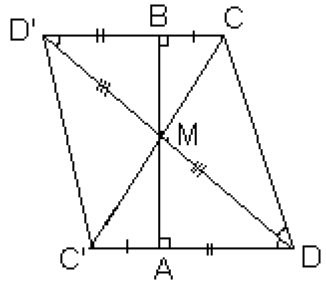
Второй способ. Из того, что ∠*A* + ∠*B* = 180° следует, что *ABCD* – трапеция. Пусть прямые *DM* и *BC* пересекаются в точке *F* (см. рис. 3б). Так как *BC* || *AD*, то ∠*BFM* = ∠*ADM* = ∠*CDM*, следовательно, треугольник *FCD* – равнобедренный. Поскольку *CD* = *BC* + *AD* = *CF* = *BC* + *BF*, то *BF* = *AD*. Тогда прямоугольные треугольники *BMF* и *AMD* равны по катету и острому углу, следовательно, *MF* = *MD*. Таким образом, *CM* – медиана равнобедренного треугольника *CDE*, следовательно, она также является его высотой, то есть ∠*CMD* = 90°.



При этом способе решения расположение точки M внутри отрезка AB следует из того, что треугольник FCD – равнобедренный.

Доказав, что M – середина AB, можно закончить решение и по-другому. Проведем среднюю линию трапеции MK (см. рис. 3в), тогда MK = $\frac{1}{2}$ *(AD + BC)* = $\frac{1}{2}$ *CD. Получим, что в треугольнике CMD медиана равна половине стороны, к которой проведена, то есть этот треугольник – прямоугольный с прямым углом M.*

Рис. 3в



Третий способ. Построим трапецию *ABC'D'*, симметричную данной относительно прямой *AB* (см. рис. 3в). Тогда *CC'D'D* – равнобокая трапеция, причем *CC'* + *DD'* = 2*BC* + 2*AD* = 2*CD* = *CD* + *C'D'*. Полученное равенство означает, что в трапецию *CC'D'D* можно вписать окружность. Центр этой окружности принадлежит оси симметрии равнобокой трапеции и одновременно является точкой пересечения биссектрис ее углов, поэтому совпадает с точкой *M*. Тогда *CM* – биссектриса угла *BCD*, следовательно, $\angle CMD$ = 90°.

Рис. 3г

Четвертый способ. Построим четырехугольник *ABD'C'*, симметричный данному относительно середины отрезка *AB* (см. рис. 3г). Так как *C'D'* = *CD* = *BC* + *AD* = *CD'* = *C'D*, то *CDC'D'* – ромб. Диагонали *C'C* и *D'D* ромба перпендикулярны, являются биссектрисами его углов и пересекают отрезок *AB* в его середине, поэтому *M* – точка их пересечения. Следовательно, $\angle CMD$ = 90°.

3.3. (***8 баллов***) Назовем натуральное число замечательным, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?

Ответ: 5391.

Заметим, что среди трехзначных чисел замечательными являются те и только те числа, которые оканчиваются на 99.

Действительно, пусть трехзначное число *N* оканчивается на 99. Докажем, что оно замечательное. В любом меньшем числе на каждом месте стоит цифра не большая, чем в числе *N*, причем на каком-то месте стоит меньшая цифра либо первая цифра отсутствует (если число не трехзначное). Поэтому меньшие числа имеют меньшую сумму цифр, то есть число *N* – замечательное.

Теперь докажем, что других трехзначных замечательных чисел нет. Любое трехзначное число имеет сумму цифр не больше чем 9·3 = 27. Суммы цифр замечательных трехзначных чисел 199, 299, ..., 999, равны соответственно 19, 20, ..., 27. Все меньшие суммы цифр уже встречаются у однозначных или двузначных чисел. Поэтому если трехзначное число не оканчивается на 99, то оно не является замечательным.

Осталось подсчитать сумму трехзначных чисел, оканчивающихся на 99: *S* = 199 + 299 + … + 999=(200 + 300 + … +1000) – 9 = (2 + 3 + …+ 10)100 – 9 = 5391.

4.1. (***9 баллов***) Решите уравнение: $\left(1+x+...+x^7\right)\left(1+x+...+x^5\right)=\left(1+x+...+x^6\right)^2$.

Ответ: 0.

Проверим, что *x* = 1 не является корнем данного уравнения. Действительно, при *x* = 1 левая часть принимает значение 48, а правая часть равна 49.

Умножим обе части исходного уравнения на (*x* – 1)². Используем формулу: $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$, где *n* – натуральное число. Так как $\left(1+x+...+x^5\right)(x-1)=x^6-1$; $\left(1+x+...+x^6\right)(x-1)=x^7-1$ и $\left(1+x+...+x^7\right)(x-1)=x^8-1$, то получим уравнение

$\left(x^8-1\right)\left(x^6-1\right)=\left(x^7-1\right)^2$. Раскроем скобки: $x^{14}-x^8-x^6+1=x^{14}-2x^7+1 \Leftrightarrow x^8+x^6=2x^7 \Leftrightarrow$ $x^6(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1$.

Таким образом, $x = 0$ – единственное решение данного уравнения.

Отметим, что если проверку делать в завершающей фазе решения, то необходимо проверять оба корня.

4.2. (***9 баллов***) На стороне *BC* квадрата *ABCD* во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник *BEC* с основанием *BC*. Известно, что угол *EAD* равен 75°. Найдите угол *BEC*.

Ответ: 60°.

Построим вне квадрата на стороне *BC* равносторонний треугольник *BE'C* (см. рис. 4). Тогда треугольник *ABE'* – равнобедренный с углом 150° при вершине *B*, следовательно, $\angle BE'A = \angle BAE' = 15°$. Поэтому $\angle E'AD = 90° - \angle BAE' = 75°$. Следовательно, точка *E* лежит на луче *AE'.* Кроме того, точки *E* и *E*' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку *BC*. Так как этот перпендикуляр не может пересекать луч *AE'* более, чем в одной точке, то *E'* совпадает с *E*, следовательно, $\angle BEC = 60°$.

Рис. 4

4.3. (***9 баллов***) На поле *e*1 шахматной доски стоит шашка. Сколько существует различных маршрутов, по которым она сможет пройти в дамки? (*Напомним, что шашка может ходить вперед по диагонали на соседнюю клетку и превращается в дамку, если достигает восьмой горизонтали.*)

Ответ: 103.

Так как шашка ходит по диагонали, то она все время остается на клетках одного цвета (в данном случае – черного). Пусть некоторая черная клетка *x* находится не на первой горизонтали. Если при этом она находится на крайней вертикали, то пойти на эту клетку можно только с одной клетки *y*, поэтому маршрутов от клетки *e*1 до клетки *x* существует столько же, сколько от *e*1 до клетки *y*. Если клетка *x* находится не на крайней вертикали, то пойти на нее можно из двух клеток, причем если к этим клеткам от *e*1 приводило *m* и *n* маршрутов, то к клетке *x* от *e*1 ведет *m* + *n* маршрутов.

Рис. 5

	20		**35**		**34**		**14**
5		**15**		**20**		**14**	
	5		**10**		**10**		**4**
1		**4**		**6**		**4**	
	1		**3**		**3**		**1**
		1		**2**		**1**	
			1		**1**		
				e1			

Двигаясь последовательно от второй до восьмой горизонтали, поставим в каждую из клеток, в которые может попасть шашка, число, равное количеству приводящих в нее маршрутов (см. рис. 5). Таким образом, количество маршрутов, приводящих к клеткам восьмой горизонтали: 20 + 35 + 34 + 14 = 103.