8 класс.

1.1. Найдите $x + y$, если $x^3 + y^3 = 9$, а $x^2y + xy^2 = 6$.

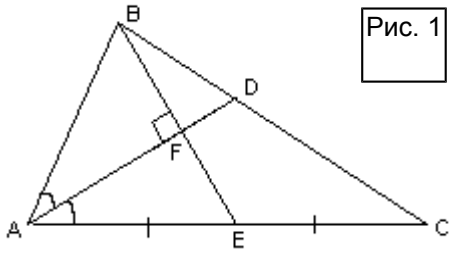
Ответ: 3.

Первый способ. Так как $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x^3 + y^3) + 3(x^2y + xy^2) = 9 + 18 = 27$, то $x + y = 3$.

Второй способ. Так как $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, а $3xy(x + y) = 3(x^2y + xy^2) = 18$, то $9 = (x + y)^3 - 18$, то есть, $x + y = 3$.

1.2. В треугольнике ABC медиана BE перпендикулярна биссектрисе AD. Найдите длину AB, если $AC = 12$.

Рис. 1



Ответ: 6.

Пусть F – точка пересечения AD и BE (см. рис. 1). В треугольнике ABE биссектриса AF является высотой, поэтому этот треугольник – равнобедренный. Следовательно, $AB = AE = \frac{1}{2} AC = 6$.

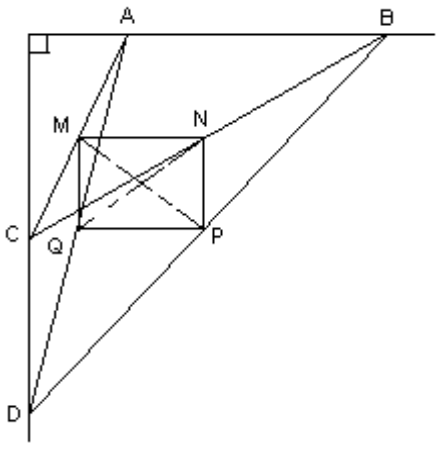
1.3. У Васи есть карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4 – по две с каждой цифрой. Он хочет сложить из них число так, чтобы между двумя единицами была одна цифра, между двойками – две цифры, между тройками – три, а между четверками – четыре. Укажите какое-нибудь число, которое может получить Вася.

Ответ: 41312432 или 23421314.

2.1. Известно, что $a + b + c = 7$, а $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0{,}7$. Найдите сумму: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Ответ: 1,9.

Перемножим почленно данные верные равенства: $\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} = 4{,}9 \Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} = 4{,}9 \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1{,}9$.



2.2. Отрезки AB и CD лежат на перпендикулярных прямых (см. рис.). Точки M, P, N и Q – середины отрезков AC, BD, BC и AD соответственно. Найдите QN, если $MP = 4$ см.

Ответ: 4 см.

Рассмотрим четырехугольник $MNPQ$ (см. рис. 2). Из условия задачи следует, что MN – средняя линия треугольника ACB, поэтому $MN \parallel AB$ и $MN = 0{,}5AB$. Аналогично, так как PQ – средняя линия треугольника ADB, то $PQ \parallel AB$ и $PQ = 0{,}5AB$. Таким образом, $MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$, то есть, $MNPQ$ – параллелограмм.

Рис. 2

Кроме того, так как MQ – средняя линия треугольника CAD, то $MQ \parallel CD$. Из того, что $AB \perp CD$, $MN \parallel AB$ и $MQ \parallel CD$, следует, что $MN \perp MQ$, то есть, $MNPQ$ – прямоугольник. По свойству диагоналей прямоугольника: $QN = MP = 4$.

2.3. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым ровно один раз (победа – 1 очко, поражение – 0, ничья – пол-очка). Все шахматисты набрали одинаковое количество очков. Если удалить любого участника и аннулировать результаты встреч с ним, то количество очков у всех остальных участников по-прежнему будет одинаковым. Верно ли, что все партии этого турнира закончились вничью?

Ответ: Да, верно.

Так как после удаления одного участника оставшиеся шахматисты по-прежнему имеют одинаковый результат, то с этим участником все сыграли одинаково. Если бы этот шахматист выиграл все партии или проиграл все партии, то количество набранных им очков не могло бы быть таким же, что и у остальных участников, как это сказано в условии задачи. Следовательно, удаленный участник закончил все свои партии вничью.

Поскольку аналогичное рассуждение можно провести для каждого из шахматистов, то все партии турнира закончились вничью.

3.1. Дано уравнение с переменной x: $(a^2 - 1)(b - 1)x = (a - 1)(b^2 - 1)$. При каких значениях a найдется значение b такое, что данное уравнение не имеет корней?

Ответ: при $a = -1$.

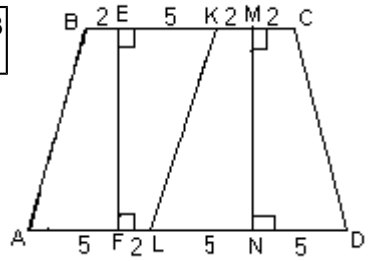
Данное уравнение имеет вид $cx = d$, где c и d – некоторые числа, то есть является линейным. Такое уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда $c = 0$, $d \neq 0$.

Следовательно, $\begin{cases}(a^2-1)(b-1)=0\\(a-1)(b^2-1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\pm 1 \text{ или } b=1\\ a\neq 1 \text{ и } b\neq\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b\neq\pm 1\end{cases}$.

Таким образом, при $a = -1$ найдется значение b (любое, кроме чисел 1 и –1), удовлетворяющее условию.

3.2. Дана равнобокая трапеция с основаниями 11 и 17. Покажите, как ее можно разрезать на четыре равные трапеции.

Рис. 3



Ответ: см. рис. 3.

Пусть $ABCD$ – данная равнобокая трапеция, у которой $AD = 17$, $BC = 11$ (см. рис. 3). Выберем на ее основаниях BC и AD соответственно точки K и L так, что $BK = AL = 7$. Тогда $ABKL$ – параллелограмм, а $DCKL$ – равнобокая трапеция с основаниями 4 и 10. Отрезок EF проходит перпендикулярно BK и AL через центр симметрии параллелограмма, а MN – ось симметрии трапеции $DCKL$, поэтому в трапециях $ABEF$, $KLFE$, $LKMN$ и $DCMN$ равны соответствующие стороны и равны соответствующие углы.

3.3. В вершинах куба расставлены числа от 1 до 8. На каждой грани записана сумма чисел, расставленных в ее вершинах. Может ли оказаться так, что на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел?

Ответ: нет, не может.

Пусть на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел, n – наименьшее из них, а S – их сумма. Тогда $S = n + (n + 1) + ... + (n + 5) = 6n + 15$. Так как каждая вершина принадлежит трем граням куба, то каждое число от 1 до 8 входит в три суммы, записанные на гранях. Поэтому, $S = (1 + 2 + \ldots + 8)\times 3 = 108$. Уравнение $6n + 15 = 108$ не имеет натуральных решений, так как в его левой части – нечетное число, а в правой части – четное.

4.1. После того, как учительница Марьиванна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку – со второго ряда на третий, а Машеньку – с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду – увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду – уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду?

Ответ: 9 человек.

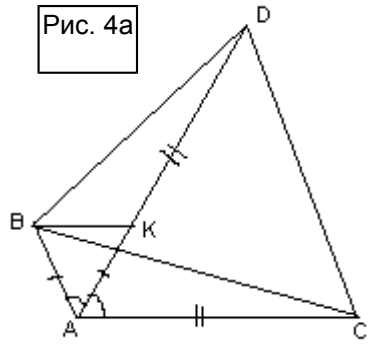
Первый способ. Пусть в третьем ряду сидит x человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, деленной на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12 недель, на втором ряду – увеличился на 24 недели, а на третьем ряду – уменьшился на $4x$ недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников изменится не могла, то $4x = 12 + 24$, то есть, $x = 9$.

Второй способ. Пусть до пересаживания учеников средний возраст сидящих на первом, втором и третьем ряду составлял a, b и c недель соответственно. Обозначим также: количество человек, сидящих в третьем ряду – x, возраст Вовочки – V недель, возраст Ванечки – W недель, возраст Машеньки – M недель.

Исходя из условия задачи, составим три уравнения: 1) $\frac{12a + M - V}{12} - a = 1$; 2) $\frac{12b + V - W}{12} - b = 2$; 3) $\frac{xc + W - M}{x} - c = -4$. Упростив эти уравнения и объединив их в систему, получим: $\begin{cases} M - V = 12 \\ V - W = 24 \\ W - M = -4x \end{cases}$. Сложив все уравнения почленно, получим, что $12 + 24 - 4x = 0$, то есть, $x = 9$.

4.2. Угол *BAC* треугольника *ABC* равен 120°. На биссектрисе этого угла взята точка *D* так, что *AD* = *AB* + *AC*. Найдите углы треугольника *BDC*.

Рис. 4а



Ответ: три угла по 60°.

Первый способ. Отложим на луче AD отрезок AK, равный AB (см. рис. 4а). Тогда ΔBAK – равнобедренный с углом 60°, то есть, ΔBAK – равносторонний. Следовательно, $BK = BA$, $DK = AD - AK = AD - AB = CA$ и $\angle BKD = 180° - \angle BKA = 120° = \angle BAC$. Тогда $\Delta BKD = \Delta BAC$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BD = BC$ и $\angle DBC = \angle DBK + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK = 60°$. Таким образом, ΔBDC – равнобедренный с углом 60°, то есть, ΔBDC – равносторонний.

Второй способ. Проведем прямые *DE* и *DF*, соответственно параллельные прямым *AB* и *AC* (см. рис. 4б), тогда *AEDF* – параллелограмм, в котором диагональ *AD* является биссектрисой угла, то есть, *AEDF* – ромб. Из условия задачи следует, что $\angle DAF = \angle DAE = \angle DEA = 60°$, то есть, сторона ромба равна его диагонали, в частности, $AD = AE = ED$. Следовательно, $EC = AE - AC = AD - AC = AB$. Тогда $\Delta ABD = \Delta ECD$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому, $BD = CD$. Кроме того, $\angle BDC = \angle BDA + \angle ADC = \angle EDC + \angle ADC = 60°$. Таким образом, ΔBDC – равнобедренный с углом 60°, то есть, ΔBDC – равносторонний.

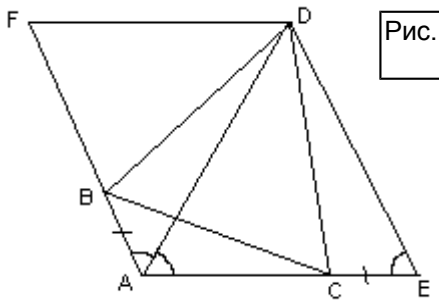


Рис. 4б

Возможны и другие способы решения, использующие различные дополнительные построения. Все эти способы, так или иначе, связаны с идеей поворота на плоскости вокруг некоторой точки. В частности, приведенные решения основаны на

рассмотрении следующих поворотов: 1) с центром B на угол 60°; 2) с центром D так, чтобы прямая AB перешла в прямую AC (то есть также на 60°).

4.3. В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

Ответ: 198.

Докажем, что в таблице не может быть больше, чем 198 крестиков. Действительно, количество крестиков, единственных в строке, не превышает количества строк, то есть, их не больше ста. Если их – ровно 100, то в каждой строке такой крестик есть, и тогда ни в какую из строк нельзя поставить еще крестик, поэтому, других крестиков в таблице быть не может. Аналогичное рассуждение можно провести, если имеется 100 крестиков, единственных в столбце. Если же и тех и других имеется не более чем по 99, то всего крестиков в таблице не больше, чем 99×2 = 198.

Такое количество крестиков, удовлетворяющих условию, поставить можно. Например, заполним крестиками одну строку и один столбец, исключая их пересечение.