7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ пересекаются. Найдите абсциссу точки пересечения.

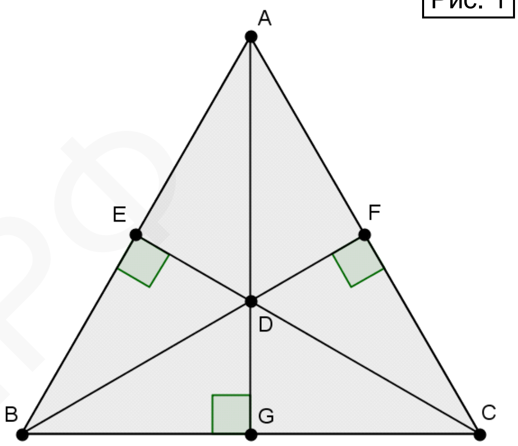
Ответ: $x = 1$.

Первый способ. Искомая абсцисса является решением уравнения $kx + b = bx + k$. Это уравнение приводится к виду: $(k – b)x = k – b$. Так как данные графики пересекаются (не совпадают), то $k \neq b$, поэтому $x = 1$.

Второй способ. Заметим, что $x = 1$ является решением задачи, так как при $x = 1$ обе заданные линейные функции принимают одно и то же значение $y = k + b$. Так как их графики пересекаются, то есть эти прямые имеют ровно одну общую точку, то других решений нет.

1.2. Можно ли расположить на плоскости четыре точки A, B, C и D так, чтобы прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC были перпендикулярны?

Рис. 1



Ответ: да, можно.

Например, рассмотрим равносторонний треугольник ABC и точку D пересечения его биссектрис (см. рис. 1). Так как биссектрисы равностороннего треугольника являются одновременно и его высотами, то условие задачи будет выполнено.

На самом деле, условию задачи удовлетворяет любой треугольник ABC, отличный от прямоугольного, и точка D пересечения его высот (в любом треугольнике три высоты пересекаются в одной точке, но в прямоугольном треугольнике эта точка совпадает с вершиной).

1.3. Перед началом чемпионата школы по шахматам каждый из участников сказал, какое место он рассчитывает занять. Семиклассник Ваня сказал, что займет последнее место. По итогам чемпионата все заняли различные места, и оказалось, что каждый, кроме, разумеется, Вани, занял место хуже, чем ожидал. Какое место занял Ваня?

Ответ: первое место.

Так как каждый из школьников (кроме Вани) занял место хуже, чем ожидал, то первое место не занял никто из них. Следовательно, первое место занял Ваня.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. В десятичной записи числа $\frac{1}{7}$ зачеркнули 2013-ую цифру после запятой (а другие цифры не меняли). Как изменилось число: увеличилось или уменьшилось?

Ответ: увеличилось.

Выполнив деление числителя на знаменатель, получим, что $\frac{1}{7} = 0,(142857)$. Значит, период получившейся дроби содержит 6 цифр. Так как число 2013 при делении на 6 дает остаток 3, то 2013-ая цифра после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{7}$ – это третья цифра периода, то есть цифра 2. После ее зачеркивания на этом месте будет стоять цифра 8. Следовательно, исходное число увеличилось.

2.2. Даны два треугольника. Сумма двух углов первого треугольника равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого треугольника также равна некоторому углу второго. Верно ли, что первый треугольник – равнобедренный?

Ответ: да, верно.

Пусть α_1, β_1 и γ_1 – углы первого треугольника, а α_2, β_2 и γ_2 – углы второго. По условию $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2$. Пусть $\beta_1 + \gamma_1 = \beta_2$. Рассмотрим два случая:

1) Если $\beta_2 = \alpha_2$, то из записанных равенств следует, что $\alpha_1 = \gamma_1$, то есть первый треугольник – равнобедренный.

2) Если $\beta_2 \neq \alpha_2$, то сложив эти равенства почленно, получим: $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2$. Но это равенство выполняться не может, так как его левая часть равна $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \beta_1 = 180° + \beta_1 > 180°$, а правая часть равна $180° – \gamma_2 < 180°$.

Таким образом, первый треугольник – равнобедренный.

2.3. Имеет ли решение ребус АПЕЛЬСИН – СПАНИЕЛЬ = 2012·2013?

Ответ: нет, не имеет.

Так как слова АПЕЛЬСИН и СПАНИЕЛЬ состоят их одних и тех же букв, то они записываются с помощью одних и тех же цифр. Любое число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9 (*), поэтому числа АПЕЛЬСИН и СПАНИЕЛЬ, записываемые одними и теми же цифрами, имеют одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, их разность кратна 9.

С другой стороны, число 2012 не делится даже на 3, а число 2013 делится на 3, но не делится на 9. Значит, их произведения на 9 не делится. Полученное противоречие показывает, что данный ребус решений не имеет.

**Доказать этот факт можно так. Рассмотрим произвольное натуральное число (для простоты записи – четырехзначное) и преобразуем его:* $\overline{abcd} = 1000a+100b+10c+d = 999a+a+99b+b+9c+c+d = (999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$. *Первое из получившихся слагаемых делится на 9 без остатка, независимо от цифр a, b, c и d. Следовательно, остаток от деления на 9 зависит только от второго слагаемого, которое и представляет собой сумму цифр данного числа. Понятно, что для любого другого количества цифр в десятичной записи числа рассуждение аналогично.*

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

3.1. Известно, что Толя поймал рыб больше, чем Коля, а Петя и Вася вместе поймали рыб столько же, сколько Коля и Толя вместе. Кроме того, Толя и Петя вместе поймали меньше, чем Вася и Коля. Кто из них поймал больше всех рыб, а кто – меньше всех?

Ответ: Вася поймал рыб больше всех, а Петя – меньше всех.

Обозначив количество рыб, пойманных каждым мальчиком, первой буквой его имени, запишем условие задачи алгебраически. Получим три утверждения:

1) $Т > К$; 2) $П + В = Т + К$; 3) $Т + П < В + К$.

Тогда, сложив почленно 2) и 3), получим: $П + В + Т + П < Т + К + В + К$, что равносильно неравенству $П < К$.

Далее, используя полученный результат и равенство 2), получим, что $В > Т$. Учитывая неравенство 1), можно теперь записать: $В > Т > К > П$.

Можно рассуждать и по-другому: сначала, используя условия 1) и 3), получить, что $П < В$, а затем рассмотреть все возможные случаи, когда может выполняться равенство 2) при условии, что $Т > К$ и $П < В$. Получится, что случай, когда $В > Т > К > П$, будет единственным не противоречащим условию задачи.

3.2. Высота *AK*, биссектриса *BL* и медиана *CM* треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*, причем *AO* = *BO*. Докажите, что треугольник *ABC* – равносторонний.

Первый способ. Из условия задачи следует, что треугольник AOB – равнобедренный, а OM – его медиана, проведенная к основанию (см. рис. 2). Следовательно, OM – высота треугольника AOB. Тогда и медиана CM треугольника ABC является его высотой, значит, этот треугольник – равнобедренный: $CA = CB$.

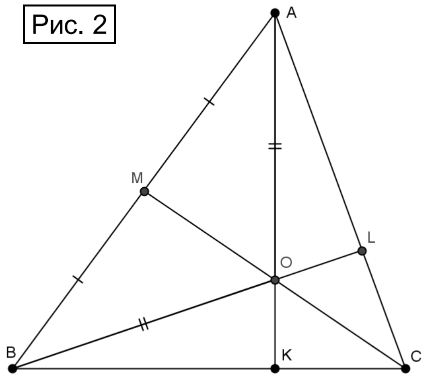


Рис. 2

Из равнобедренности треугольников ACB и AOB следует равенства углов при их основаниях, значит, $\angle OBC = \angle OAC$. Тогда, учитывая, что BL – биссектриса угла ABC, получим, что AK – биссектриса угла BAC. По условию, AK – высота треугольника ABC, поэтому $AB = AC$.

Таким образом, $AB = BC = AC$, то есть треугольник ABC – равносторонний.

Доказав, что $CA = CB$, можно продолжить рассуждение иначе. Медиана CM данного треугольника является его высотой, поэтому O – точка пересечения высот AK и CM, значит, биссектриса BL, проходящая через точку O, также является высотой этого треугольника. Следовательно, $BC = BA$.

Второй способ. Из равенства $AO = BO$ следует, что $\angle OAB = \angle OBA$ (см. рис. 2). Кроме того, $\angle AKB = 90°$, а BO – биссектриса угла ABK, значит, $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBK = 30°$. Тогда, в прямоугольном треугольнике ABK: $BK = \frac{1}{2}AB = BM$. Значит, равны треугольники OBM и OBK (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $OM \perp AB$ и $OM = OK$. Таким образом, равны прямоугольные треугольники OMA и OKC (по катету и острому углу), поэтому $AM = CK$. Следовательно, $AB = BC$, то есть треугольник ABC – равнобедренный, при этом, $\angle ABC = 60°$, значит, этот треугольник – равносторонний.

Существуют и другие способы рассуждений.

3.3. Известно, что a, b и c – различные составные натуральные числа, но каждое из них не делится ни на одно из целых чисел от 2 до 100 включительно. Докажите, что если эти числа – наименьшие из возможных, то их произведение abc является кубом натурального числа.

Без ограничения общности можно считать, что $a < b < c$. Из условия задачи следует, что ни одно из трех рассматриваемых чисел не имеет простых делителей из первой сотни натуральных чисел. Кроме того, поскольку эти числа – составные, то у каждого из них есть не менее двух простых делителей, больших ста.

Первые три простых числа во второй сотне – это 101, 103 и 107. Следовательно, $a = 101^2$ является наименьшим числом, обладающим указанными свойствами, а $b = 101\cdot103$ – следующим за ним. Так как $103^2 = 10609 < 101\cdot107 = 10807$, то $c = 103^2$.

Таким образом, $abc = 101^2\cdot101\cdot103\cdot103^2 = (101\cdot103)^3$, что и требовалось.

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

4.1. Известно, что каждое из чисел x и y можно представить в виде суммы квадратов каких-то двух целых чисел. Докажите, что число xy также является суммой квадратов каких-то двух целых чисел.

Пусть $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, где a, b, c и d – целые числа. Тогда $xy = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, что и требовалось, поскольку числа $ac + bd$ и $ad - bc$ являются целыми.

4.2. Существует ли пятиугольник, который одним прямолинейным разрезом можно разбить на три части так, что из двух частей можно будет сложить третью?

Ответ: да, существует.

Рассмотрим, например, пятиугольник $ABCDE$, составленный из прямоугольника $ABXY$ и равных прямоугольных треугольников CDX и EDY (см. рис. 3).

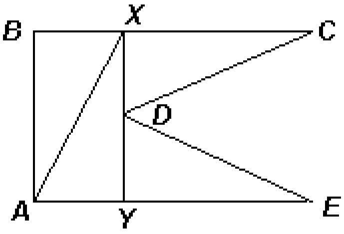


Рис. 3

Если выбрать размеры пятиугольника так, чтобы $AB = CX = EY = 2BX = 2DX = 2DY$, и разрезать его по прямой XY, то из прямоугольных треугольников CDX и EDY можно будет сложить прямоугольник $ABXY$.

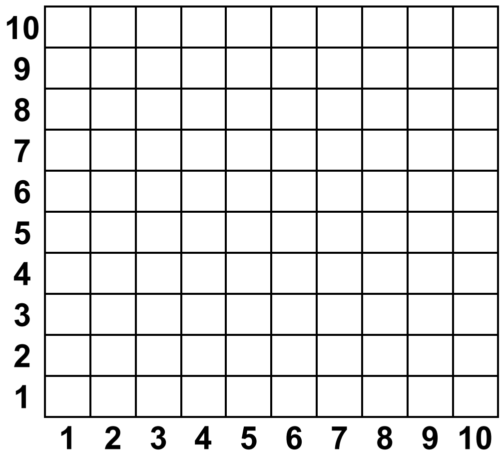
Существуют и другие примеры.

4.3. На белых и чёрных клетках доски 10×10 стоит по одинаковому количеству ладей так, что никакие две ладьи друг друга не бьют. Докажите, что на эту доску можно поставить еще одну ладью так, чтобы она не била никакую из уже стоящих.

Докажем, что изначально на доске не могло стоять больше, чем 8 ладей. Пусть это не так, и ладей было 10. Так как ладьи друг друга не бьют, то при любой их расстановке на каждой горизонтали и на каждой вертикали расположено ровно по одной ладье. Дальнейшие рассуждения возможны различными способами.

Первый способ. Пронумеруем горизонтали и вертикали доски числами от 1 до 10 (см. рис.). Тогда каждой клетке доски будут соответствовать ее координаты – упорядоченная пара чисел. Заметим, что сумма координат у любой черной клетки четная, а у любой белой – нечетная. Значит, если на белых и на черных клетках стоят по 5 ладей, то сумма всех координат этих десяти клеток является нечетным числом.

С другой стороны, так как на каждой горизонтали и на каждой вертикали расположено ровно по одной ладье, то каждое число от 1 до 10 на каждой из двух позиций встречается ровно по одному разу. Следовательно, сумма всех координат этих десяти клеток равна $(1 + 2 + ... + 9 + 10)\cdot 2 = 110$ – четное число.



Полученное противоречие показывает, что изначально на доске не могло стоять 10 ладей.

Второй способ. Назовем ладью, стоящую на белой клетке, – «белой», а ладью, стоящую на черной клетке, – «черной». Заметим, в любой изначальной расстановке каждые две ладьи являются двумя противоположными вершинами некоторого прямоугольника. Если в этом прямоугольнике переставить ладьи в два других угла, то в новой расстановке никакие две ладьи по-прежнему не будут бить друг друга. В результате подобной перестановки двух ладей количество белых и черных ладей либо останется неизменным (в случае, если противоположные углы рассматриваемого прямоугольника были разного цвета), либо изменится на 2 (если противоположные углы одного цвета).

Заметим также, что такими перестановками любую изначальную расстановку ладей можно последовательно привести к «диагональной» (когда все ладьи будут располагаться на большей диагонали доски). Действительно, выберем сначала две ладьи, стоящие на первой горизонтали и первой вертикали, тогда указанная перестановка позволит разместить одну из ладей в левой нижней клетке. Затем аналогично поступим с ладьями, стоящими на второй горизонтали и второй вертикали, и так далее. После того, как девятая ладья встанет на выбранную диагональ, десятая ладья окажется на ней автоматически. Но в «диагональной» расстановке все ладьи – одного цвета, то есть количество как белых, так и черных ладей – четно. Так как указанные операции «обратимы», то это означает, что изначально на доске не могло быть 5 белых и 5 черных ладей.

Таким образом, доказано, что в изначальной расстановке было не больше, чем 8 ладей. Значит, найдется, по крайней мере, одна свободная вертикаль и одна свободная горизонталь, на пересечении которых мы сможем поставить еще одну ладью.