

## 7 класс

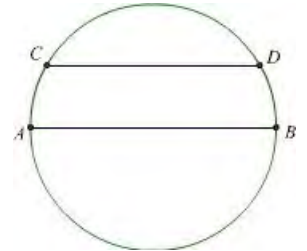
### Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов? *Ответ обоснуйте.*

Ответ: 200.

Первый способ. Пусть каждый двугорбый верблюд «поделится» горбом с лошастью (у которой горба нет). Тогда у каждого животного будет по одному горбу, что означает, что количество горбов равно количеству животных в стаде.

Второй способ. Пусть  $x$  – количество лошадей (тогда количество двугорбых верблюдов также равно  $x$ ), а  $y$  – количество одногорбых верблюдов. Следовательно, горбов в стаде  $2x + y$ , что, по условию, равно 200, и животных в стаде также  $2x + y$ .

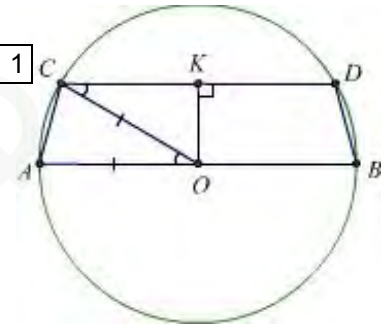


1.2. В окружности провели диаметр  $AB$  и параллельную ему хорду  $CD$ , так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности (см. рис.). Найдите угол  $CAB$ .

Ответ:  $75^\circ$ .

Пусть  $O$  – центр данной окружности, а  $K$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $CD$  (см. рис. 1). Тогда в прямоугольном треугольнике  $OCK$  катет  $OK$  вдвое меньше гипотенузы  $OC$ , следовательно,  $\angle OCK = 30^\circ$ . Поскольку  $CD \parallel AB$ , то  $\angle AOC = \angle OCK = 30^\circ$ . Треугольник  $AOC$  – равнобедренный, поэтому,  $\angle CAO = \angle ACO = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$ .

Рис. 1



1.3. Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых является простым числом. *Ответ обоснуйте.*

Ответ: (3; 2).

Пусть  $n$  и  $m$  – искомые простые числа и  $n^2 - m^2$  – простое число. Поскольку  $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$ , то  $n - m = 1$ . Значит,  $n$  и  $m$  – последовательные натуральные простые числа. Следовательно, одно из них четное, а единственное четное простое число – это 2. Значит, единственный возможный вариант:  $m = 2$ ,  $n = 3$ . Разность их квадратов действительно равна простому числу 5.

### Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Из четырех неравенств  $2x > 70$ ,  $x < 100$ ,  $4x > 25$  и  $x > 5$  два истинны и два ложны. Найдите значение  $x$ , если известно, что оно целое.

Ответ: 6.

Первый способ. Для каждого значения  $x$  данные неравенства являются логическими высказываниями. Обозначим их: а)  $2x > 70$ ; б)  $x < 100$ ; в)  $4x > 25$ ; г)  $x > 5$ .

1) Если истинно а), то истинны в) и г), то есть три высказывания истинны, что противоречит условию. Следовательно, неравенство а)  $2x > 70$  – ложно, значит,  $x \leq 35$ .

2) Если истинно высказывание  $x \leq 35$ , то высказывание б) также истинно, поэтому, из высказываний в) и г) одно должно быть истинно, а другое – ложно.

3) Если истинно высказывание в), то истинно и г) – противоречие. Следовательно, высказывание в) ложно, тогда  $x \leq 6$ . Значит, высказывание г) должно быть истинно.

Таким образом,  $5 < x \leq 6$ , то есть  $x = 6$ .

Второй способ. Учитывая, что  $x$  – целое число, данные неравенства можно переписать так:  $x > 5$ ,  $x > 6$ ,  $x > 35$  и  $x < 100$ . Если неверно, что  $x < 100$ , то остальные три неравенства – верные, что противоречит условию. Значит, из трех неравенств:  $x > 5$ ,  $x > 6$  и  $x > 35$  – одно верное и два неверных.

Так как из третьего неравенства следуют первые два, а из второго неравенства следует первое, то остается принять, что первое неравенство верно, а два других – нет. Таким образом,  $5 < x \leq 6$ , то есть  $x = 6$ .

**2.2.** Какое наибольшее количество точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, в которой 7 звеньев?

Ответ: 14.

Рассмотрим любое звено этой ломаной и обозначим его  $AB$ . На отрезке  $AB$  могут находиться не более четырех точек самопересечения ломаной, поскольку со звеньями, исходящими из вершин  $A$  и  $B$ , отрезок  $AB$  пересечься не может. Так как у рассматриваемой ломаной 7 звеньев и в каждой точке пересекаются два звена, то точек самопересечения не больше, чем  $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ . Пример ломаной,

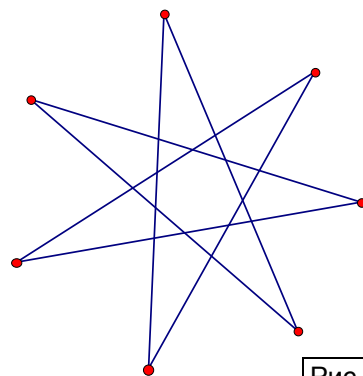


Рис. 2

у которой 14 точек самопересечения, приведен на рис. 2.

**2.3.** Можно ли в клетки квадрата  $10 \times 10$  поставить некоторое количество звездочек так, чтобы в любом квадрате  $2 \times 2$  было ровно две звездочки, а в любом прямоугольнике  $3 \times 1$  – ровно одна звездочка? (В каждой клетке может стоять не более одной звездочки.)

Ответ: нет, нельзя.

Первый способ. Квадрат  $10 \times 10$  можно разбить на 25 непересекающихся квадратов  $2 \times 2$ . Так как в каждом из них должно быть по две звездочки, то всего звездочек должно быть 50. С другой стороны, 99 клеток исходного квадрата можно разбить на 33 непересекающихся прямоугольника  $3 \times 1$ . В каждом из них должно быть по одной звездочке, поэтому, даже поставив звездочку в оставшуюся клетку, мы не сможем получить больше, чем 34 звездочки. Полученное противоречие доказывает невозможность требуемой расстановки.

Второй способ. Докажем, что требуемым образом нельзя заполнить даже квадрат  $3 \times 3$ . Действительно, так как в каждом прямоугольнике  $3 \times 1$  должна стоять только одна звездочка, то в каждой строке и в каждом столбце квадрата  $3 \times 3$  должно стоять только по одной звездочке. Рассмотрим левый верхний квадрат  $2 \times 2$ . По условию, в нем должно быть две звездочки. Но тогда в третьем столбце первой и второй строки не должно быть звездочек, значит, в правом верхнем квадрате  $2 \times 2$  будет стоять только одна звездочка, а не две.

### Третий тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

**3.1.** Существуют ли такие целые числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , для которых выполняется равенство:  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2011$ ?

Ответ: нет, не существуют.

Предположим, что такие целые числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  существуют. Тогда, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:  $-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3zy^2 + 3z^2x - 3zx^2 = 2011$ . В этом равенстве левая часть является целым числом, которое кратно трем, а правая часть на 3 не делится. Полученное противоречие показывает, что указанных  $x$ ,  $y$  и  $z$  не существует.

Аналогичное противоречие можно также получить, используя формулу  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ .

Тогда  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x) = 2011$ .

**3.2.** Дан квадрат  $ABCD$ . На стороне  $AD$  внутри квадрата построен равносторонний треугольник  $ADE$ . Диагональ  $AC$  пересекает сторону  $ED$  этого треугольника в точке  $F$ . Докажите, что  $CE = CF$ .

Докажем, что  $\angle CEF = \angle NFE$  (см. рис. 3), из чего будет

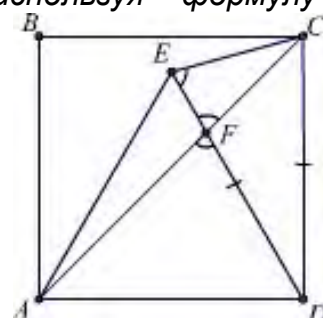


Рис. 3

следовать утверждение задачи. Действительно, треугольник  $AED$  – равносторонний, поэтому  $\angle ADE = 60^\circ$ , а  $\angle CDE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Так как  $CD = AD = DE$ , то треугольник  $EDC$  – равнобедренный, следовательно,  $\angle CED = \angle ECD = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$ .

Поскольку  $AC$  – диагональ квадрата, то  $\angle CAD = 45^\circ$ , значит, из треугольника  $AFD$ :  $\angle AFD = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$ . Углы  $\angle FFE$  и  $\angle AFD$  – вертикальные, следовательно,  $\angle FFE = \angle AFD = 75^\circ$ .

**3.3.** Десять друзей послали друг другу открытки: каждый послал ровно пяти друзьям, каждому – по одной открытке. Всегда ли найдутся двое, которые послали открытки друг другу?

Ответ: да, всегда.

Первый способ. Предположим, что это не так, то есть не существует пары друзей, которые послали открытки друг другу. Занумеруем всех друзей числами от 1 до 10. Пусть друг №1 послал открытки друзьям с номерами 2, 3, 4, 5 и 6. Поскольку мы предположили, что ему никто из них не ответил, то он мог получить не более четырех открыток от друзей с номерами 7, 8, 9 и 10. Аналогично, любой из друзей с другими номерами не мог получить более четырех открыток. Значит, количество полученных открыток не может быть больше, чем 40, в то время как отправлено было  $5 \cdot 10 = 50$  открыток. Полученное противоречие показывает, что наше предположение не верно, то есть найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Второй способ. Подсчитаем количество пар друзей:  $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ . Так как всего было послано  $5 \cdot 10 = 50$  открыток, то на какую-то из пар приходится хотя бы две посланные открытки, то есть в этой паре друзья послали открытки друг другу.

*Из этого решения следует, что друзей, пославших открытки друг другу, не менее пяти.*

#### Четвертый тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

**4.1.** Вася выписал все трехзначные числа и вычислил в каждом числе произведение его цифр, а затем сложил все полученные произведения. Какое число у него получилось?

Ответ:  $45^3$ .

Любое трехзначное число имеет вид  $\overline{abc}$ , где  $a$  – любая цифра от 1 до 9, а  $b$  и  $c$  – любые цифры от 0 до 9. Рассмотрим все возможные значения произведения  $abc$ . Их сумму удобно записать в таком виде:  $(1 + 2 + \dots + 9)(0 + 1 + 2 + \dots + 9)(0 + 1 + 2 + \dots + 9)$ .

Действительно, при раскрытии скобок получится 900 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение цифр одного из девяти сот трехзначных чисел. Так как сумма чисел в каждой скобке равна 45, то искомое число равно  $45^3$ .

**4.2.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ :  $\angle A = \angle A_1$ ; равны высоты, проведенные из вершин  $B$  и  $B_1$ ; равны медианы, проведенные из вершин  $C$  и  $C_1$ . Обязательно ли эти треугольники равны?

Ответ: нет, не обязательно.

Приведем пример двух неравных треугольников, для которых выполняются все равенства из условия задачи.

На одной из сторон острого угла  $A$  отложим произвольный отрезок  $AB$  (см. рис. 4). Из точки  $K$  – середины отрезка  $AB$  опустим перпендикуляр  $KH$  на другую сторону угла. Отметим на этой стороне угла точки  $C$  и  $C_1$  так, чтобы  $HC = HC_1$ . Тогда в треугольнике  $CKC_1$  совпадают высота и медиана, поэтому, он – равнобедренный ( $KC = KC_1$ ).

Таким образом, в треугольниках  $ABC$  и  $ABC_1$ :

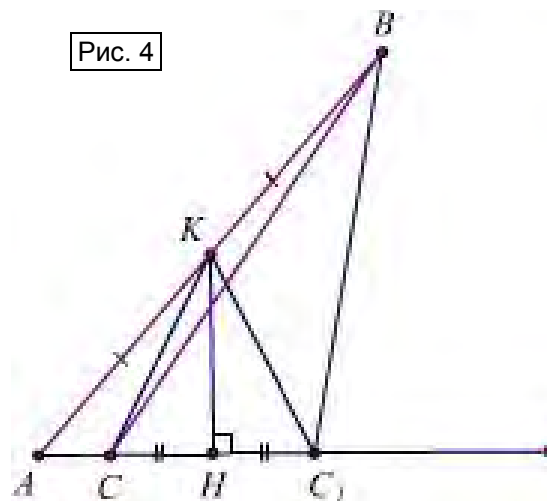


Рис. 4

равны углы  $BAC$  и  $BAC_1$ , высота, проведенная из вершины  $B$  – общая, и равны медианы  $CK$  и  $C_1K$ , проведенные из вершин  $C$  и  $C_1$ .

**4.3.** Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что любые два из этих чисел взаимно просты? (Напомним, что взаимно простыми называются числа, у которых наибольший общий делитель равен 1.)

Ответ: нет, не существуют.

Каждое из составных чисел является произведением, по крайней мере, двух простых чисел. В каждом из таких произведений не может быть больше одного двузначного сомножителя, иначе это произведение будет, как минимум, трехзначным числом. Значит, в разложении на простые множители каждого из искомым двузначных чисел должно присутствовать однозначное простое число. Но простых однозначных чисел всего четыре: 2, 3, 5 и 7. Следовательно (по принципу Дирихле), среди любых пяти составных двузначных чисел найдутся два, у которых будет общий делитель, отличный от 1.