

7 класс

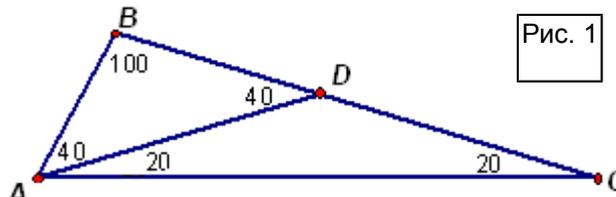
Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. Разложите на множители: $1 + 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2$.

Ответ: $(1 + a^2 - b^2)(1 - a^2 + b^2)$.

Раскроем скобки и перегруппируем: $1 + 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2 = 1 + 4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 = 1 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 1 - (a^2 - b^2)^2 = (1 + a^2 - b^2)(1 - a^2 + b^2)$.

1.2. Два угла треугольника равны 100° и 60° . Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.



Ответ: см. рис. 1.

Пусть в треугольнике ABC углы A и B равны 60° и 100° соответственно, тогда угол C равен 20° (см. рис. 1). Проведем отрезок AD так, чтобы $\angle DAC = 20^\circ$. Тогда в каждом из треугольников ADC и ABD есть по два равных угла, то есть эти треугольники – равнобедренные.

1.3. Из Москвы в Неаполь самолет вылетает в 9.20 по московскому времени, а прилетает в 11.30 по неаполитанскому. Из Неаполя в Москву самолет вылетает в 8.30 по неаполитанскому времени, а прилетает в 14.40 по московскому. Какова разница во времени между Москвой и Неаполем?

Ответ: 2 часа.

Перелет в обе стороны длится одно и тоже время, но из-за смены часового пояса возникает разница во времени. В первом случае показания часов отличаются на 2 часа 10 минут, а во втором – на 6 часов 10 минут. Так как в первом случае мы из времени перелёта вычитаем разницу во времени, а во втором – её же прибавляем, то разница во времени между Москвой и Неаполем равна: $(6 \text{ ч } 10 \text{ мин} - 2 \text{ ч } 10 \text{ мин}) : 2 = 2 \text{ (ч)}$.

Такой же результат можно получить из уравнения $2\frac{1}{6} + x = 6\frac{1}{6} - x$, где x – искомая разница во времени (в часах).

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Балда договорился с попом отработать на него ровно год и расплатиться щелчками по лбу. Балда предложил, чтобы за каждый отработанный день ему добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром (по его мнению) варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущенный вычитается аж 121 щелчок. По окончании срока выяснилось, что в обоих случаях поп должен получить от Балды одно и то же количество щелчков. Сколько именно?

Ответ: 3 щелчка.

Первый способ. Предположим, что год не високосный. Пусть Балда x дней отработал, а $(365 - x)$ дней прогулял, тогда по своему предложению он будет иметь право на $x - (365 - x) \times 10 = 11x - 365 \times 10$ щелчков, а по предложению попа – на $12x - (365 - x) \times 121 = 133x - 365 \times 121$ щелчков.

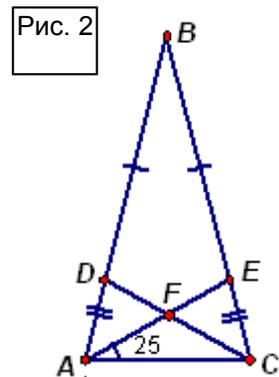
Поскольку в итоге выяснилось, что количество щелчков в обоих случаях одно и то же, то составляем уравнение $11x - 365 \times 10 = 133x - 365 \times 121$. Упростив его, получим: $122x = 365 \times 11$. Такое уравнение не имеет натуральных решений.

Если же год високосный, то, рассуждая аналогично, получим уравнение $122x = 366 \times 11$, то есть $x = 333$. Следовательно, поп должен получить от Балды $333 - (366 - 333) \times 10 = 3$ щелчка.

Второй способ. Пусть Балда отработал a дней и прогулял b дней, тогда $a - 10b = 12a - 121b$. Упрощая это равенство, получим, что $11a = 111b$. Поскольку числа 11 и 111 – взаимно простые, то a кратно 111, b кратно 11. Так как $a \leq 366$, то a может быть равно 111, 222 или 333. Соответствующие значения b : 11; 22; 33. Тогда сумма $a + b$ (количество дней в году) принимает значения 122, 244 и 366 соответственно. Отсюда заключаем, что год был високосным, то есть $a = 333$, $b = 33$. Следовательно, попу причитается $a - 10b = 333 - 330 = 3$ щелчка.

Отметим, что полученный ответ полностью согласуется с литературным источником: А.С. Пушкин, «Сказка о попе и его работнике Балде».

2.2. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = BE$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F . Найдите угол AFC , если угол EAC равен 25° .



Ответ: 130° .

Так как $AB = BC$ и $BD = BE$, то $AD = CE$ (см. рис. 2). Кроме того, $\angle BAC = \angle BCA$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Рассмотрим треугольники ACD и CAE . Так как у них общая сторона AC , то эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle DCA = \angle EAC = 25^\circ$. Тогда из треугольника AFC получим, что $\angle AFC = 180^\circ - (25^\circ + 25^\circ) = 130^\circ$.

2.3. Может ли сумма квадратов двух простых чисел быть квадратом какого-нибудь целого числа?

Ответ: нет, не может.

Пусть такое возможно, тогда выполняется равенство $a^2 + b^2 = x^2$, где a и b – простые числа. Тогда $b^2 = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Это возможно только в двух случаях: $x - a = x + a = b$ или $x - a = 1$; $x + a = b^2$.

В первом случае $a = 0$, что противоречит условию. Во втором случае $x = a + 1$, тогда $2a + 1 = b^2$, то есть $2a = (b - 1)(b + 1)$. Если $b = 2$, то a – не целое число, следовательно b – нечетное. Тогда $b - 1$ и $b + 1$ соседние четные числа, значит, одно из них кратно 2, а другое кратно 4. Следовательно, $2a$ делится на 8, то есть a делится на 4 – противоречие.

Получив, что $a = x - 1$, можно также было провести аналогичное рассуждение и получить, что $b = x - 1$. Тогда $a = b$ и исходное равенство примет вид $2a^2 = x^2$, что невозможно для целых значений a и x .

Третий тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

3.1. Несколько учеников отвечали на уроке, и каждый получил не ниже тройки. Аня получила отметку, которая на 10 меньше, чем сумма отметок остальных; Боря получил отметку, которая на 8 меньше, чем сумма отметок остальных; Вера – отметку, которая на 6

меньше, чем сумма отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?

Ответ: отвечало 4 человека; один получил «5», двое – «4», один – «3».

Пусть S – сумма всех полученных оценок, A – оценка Ани, B – оценка Бори, V – оценка Веры. Из условия задачи следует, что: $S - A = A + 10$; $S - B = B + 8$; $S - V = V + 6$. Следовательно, $S = 2A + 10 = 2B + 8 = 2V + 6$. Значит, $V - B = B - A = 1$. Так как двоек не было, то возможен только один вариант: $A = 3$, $B = 4$, $V = 5$. Следовательно, $S = 16$, тогда $S - (A + B + V) = 4$, то есть еще один ученик получил оценку «4».

3.2. В остроугольном треугольнике ABC : $\angle A = 30^\circ$; BB_1 и CC_1 – высоты; B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пересекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2 ?

Ответ: под прямым углом.

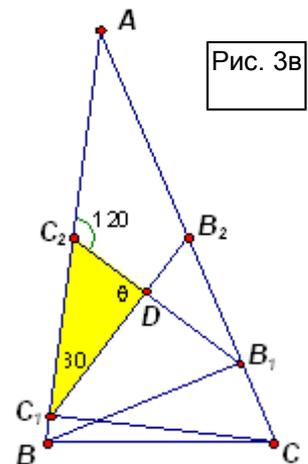
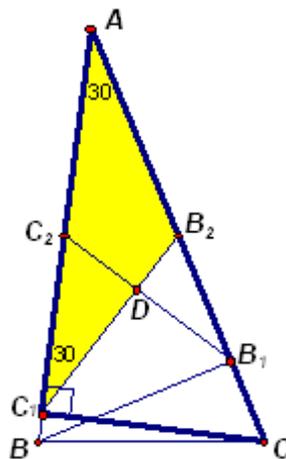
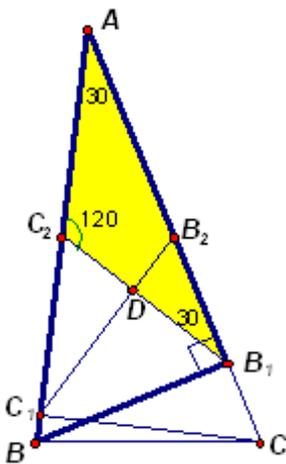
Рассмотрим прямоугольный треугольник ABB_1 , B_1C_2 – его медиана (см. рис. 3а). По свойству прямоугольного треугольника $B_1C_2 = \frac{1}{2} AB = AC_2$. Следовательно, треугольник AC_2B_1 – равнобедренный с углом 30° при основании, значит, $\angle AC_2B_1 = 120^\circ$. Аналогично, C_1B_2 – медиана прямоугольного треугольника ACC_1 (см. рис. 3б), поэтому $C_1B_2 = \frac{1}{2} AC = AB_2$. Следовательно, треугольник AB_2C_1 – также равнобедренный с углом 30° при основании.

Рассмотрим треугольник C_1C_2D , где D – точка пересечения отрезков B_1C_2 и C_1B_2 (см. рис. 3в). Пусть $\angle C_1DC_2 = x$. По теореме о внешнем угле треугольника $x + 30^\circ = 120^\circ$. Следовательно, искомый угол между прямыми B_1C_2 и C_1B_2 равен 90° .

Рис. 3а

Рис. 3б

Рис. 3в



Отметим, что вместо треугольника AB_2C_1 можно было рассмотреть треугольник B_2CC_1 (см. рис. 3б), в котором $C_1B_2 = \frac{1}{2} AC = CB_2$ и $\angle ACC_1 = 90^\circ - \angle BAC = 60^\circ$.

Следовательно, этот треугольник – равносторонний, значит, $\angle C_1B_2C = 60^\circ$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle B_1DB_2 = 90^\circ$.

3.3. В школе прошел шахматный турнир, в котором участвовало 20 шахматистов (каждый сыграл с каждым один раз). После подведения итогов оказалось, что Толя с 9,5 очками занял 19-е место, ни с кем его не разделив. Единоличным же победителем оказался Витя. Определите, сколько очков набрал каждый участник. (В шахматах за победу присуждается одно очко, за поражение – 0 очков, за ничью – пол-очка.)

Ответ: Витя набрал 10,5 очков, Толя – 9,5 очков, занявший последнее место набрал 0 очков, а каждый из остальных участников набрал 10 очков.

Общее количество партий, сыгранных в турнире, равно $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, то сумма очков, набранных всеми участниками, равна 190. Вычтем очки, набранные Толей: $190 - 9,5 = 180,5$ – сумма очков, набранных остальными участниками. Поскольку 18 человек оказались в турнирной таблице выше Толи, то каждый из них набрал не менее, чем 10 очков, а в сумме они набрали не менее 180 очков. Оставшиеся пол-очка обязан был набрать Витя, так как он единолично занял первое место.

Покажем, что описанная ситуация возможна. Действительно, пусть каждый участник выиграл у занявшего последнее место, Витя победил Толю, а все остальные партии закончились вничью.

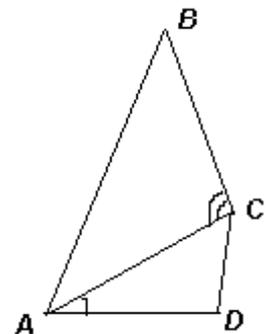
Четвертый тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

4.1. Сравните: $400^5 - 399^2(400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$ и 2000.

Ответ: первое число меньше второго.

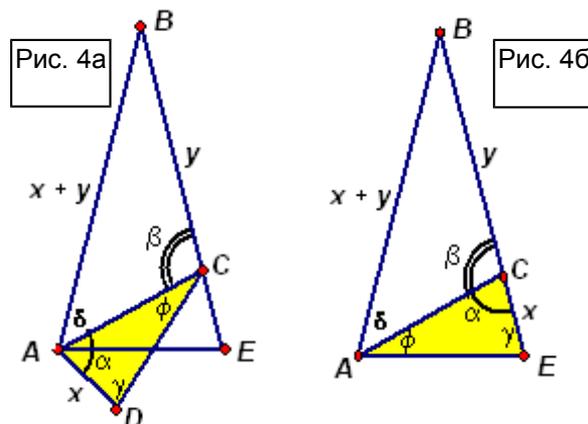
Пусть $a = 400$, тогда первое выражение примет вид: $a^5 - (a - 1)^2(a^3 + 2a^2 + 3a + 4)$. Преобразуем его: $a^5 - (a - 1)^2(a^3 + 2a^2 + 3a + 4) = a^5 - (a^2 - 2a + 1)(a^3 + 2a^2 + 3a + 4) = a^5 - a^5 - 2a^4 - 3a^3 - 4a^2 + 2a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 8a - a^3 - 2a^2 - 3a - 4 = 5a - 4$. Таким образом, при $a = 400$ значение выражения равно 1996, что меньше, чем 2000.

4.2. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$ (см. рис.). Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.



Для удобства введем обозначения: $AD = x$, $BC = y$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle ADC = \gamma$, $\angle BAC = \delta$, $\angle ACD = \phi$ (см. рис. 4а). Тогда $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $AB = x + y$ (по условию).

Если сумма двух углов равна 180° , то можно приложить их один к другому так, чтобы они имели общую сторону, а две другие стороны стали противоположными лучами. Поэтому «отрежем» треугольник ACD , перевернем его и приставим обратно, так чтобы вершины A и C поменялись местами. Новое положение вершины D обозначим E .



Так как $\alpha + \beta = 180^\circ$, то точки B , C и E будут лежать на одной прямой. При этом $CE = AD = x$, то есть $BE = x + y = AB$ (см. рис. 4б). В равнобедренном треугольнике ABE углы при основании равны, то есть $\delta + \phi = \gamma$, что и требовалось.

4.3. Коля выписал все трехзначные числа, в записи которых нет нулей. Для каждого такого числа Вася записал сумму двух его цифр: наименьшей и наибольшей. Найдите сумму цифр, записанных Васей.

Ответ: 7290.

Поскольку каждая цифра от 1 до 9 может стоять на любом из трех мест, то общее количество чисел, записанных Колей, равно $9^3 = 729$.

Разобьем эти числа на пары: 111 – 999, 112 – 998 и так далее, таких пар будет $(729 - 1) : 2 = 364$ (число 555 останется без пары).

Пусть в первом числе некоторой пары наименьшая цифра равна a , тогда во втором числе наибольшая цифра равна $(10 - a)$. Аналогично, если в первом числе наибольшая цифра равна b , то наименьшая цифра во втором числе равна $(10 - b)$. Тогда в каждой паре сумма двух наименьших и двух наибольших цифр равна 20. Общая сумма таких цифр будет равна $20 \times 364 = 7280$. Добавив к этой сумме 10 (сумма наибольшей и наименьшей цифры числа 555), получим 7290.

Отметим, что подсчет искомой суммы «в лоб» связан со значительными техническими трудностями.