

2014 год

1 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3})$.
2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/2}(x^2 - 6x + 17)$.
3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.
4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2 . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A , пересекает отрезок B_1B_2 в точке C . Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1 , O_1O_2 , O_2B_2 в точках D_1 , L , D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

6. Найдите все положительные x , y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

2 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}(\sqrt{28} + \sqrt{3})$.
2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/3}(x^2 + 4x + 31)$.
3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{-5x+7} > x^{-7}$.
4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2} |\sin x| \cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8} \right) + \frac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A . Прямая, делящая угол

ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2 , если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

3 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}(8 - 4\sqrt{2})$.

2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/2}(x^2 - 8x + 20)$.

3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{4x-5} > x^{-2}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right) + \frac{1}{4} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2 . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A , пересекает отрезок B_1B_2 в точке C . Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1 , O_1O_2 , O_2B_2 в точках D_1 , L , D_2 соответственно. Найдите отношение $CD_1 : CO_1$, если известно, что $LD_2 = O_2D_2$.

6. Найдите все положительные x, y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y^{3/2} = 54 \\ x^{2/3} + y = 18 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

4 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7+2\sqrt{10}}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.
2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/3}(x^2 + 10x + 34)$.
3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{-7x+5} > x^{-4}$.
4. Решите уравнение $\cos^2 x + \sqrt{2}|\cos x| \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A . Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите LO_1 , если известно, что $CO_2 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 y} = 54 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 16 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответы

1 вариант

1. 4. 2. -3 . 3. $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. 4. $\frac{7\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. 1 : 1. 6. $x = 4, y = 8$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 8. $[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$.

2 вариант

1. 1. 2. -3 . 3. $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. 4. $\frac{9\pi}{4} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. 4. 6. $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$. 7. $\frac{\sqrt{7}}{6}$. 8. $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

3 вариант

1. 8. 2. -2. 3. $x \in \left(0; \frac{4}{5}\right) \cup (1; +\infty)$. 4. $\frac{13\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. 1 : 1. 6. $x = 27, y = 9$. 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $[-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$.

4 вариант

1. 3. 2. -2. 3. $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{9}{7}; +\infty\right)$. 4. $\frac{9\pi}{4} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 5. 1. 6. $x = \arcsin \frac{1}{3}, y = \arccos \frac{1}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 8. $[-2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}]$.