

2016 год

1 вариант

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a .

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x} (1 + \log_x^2 3) \leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T . Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S . Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C . Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

6. Ровно в 9:00 из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт B , из пункта B в пункт A выехал автобус. Когда до пункта A оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт A , если известно, что автобус прибыл в пункт A ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB , перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K , так что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS , параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS .

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

2 вариант

1. Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{5}{3}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2 + ax - 10 = 0$ равна 7. Найдите все возможные значения a .

3. Решите уравнение $8\cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2} (1 + \log_2^2 x) \leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D . Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E . Найдите BE , если известно, что $EC = CA$, площадь четырехугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2 : 3$.

6. Ровно в 10:00 из пункта A в пункт B выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт B , из пункта B в пункт A выехал грузовик. Когда до пункта A оставалось шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт A , если известно, что велосипедист прибыл в пункт A ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL , перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T , так что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV , перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV .

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13 + \log_a^2 \cos \frac{x}{a} + \log_a \cos^4 \frac{x}{a}} + \sqrt{97 + \log_a^2 \sin \frac{x}{a} - \log_a \sin^8 \frac{x}{a}} + \sqrt{20 + \log_a^2 \operatorname{tg} \frac{x}{a} + \log_a \operatorname{tg}^4 \frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

3 вариант

1. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{5}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2 + ax + 6 = 0$ равна 1. Найдите все возможные значения a .

3. Решите уравнение $6 \cos^2 x + 3 \cos 2x = 5 \sin 2x - 2$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_5 x} (1 + \log_x^2 5) \leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке S . Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T . Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C . Найдите площадь четырехугольника $SACB$, если известно, что $CA = 5, CB \parallel AS$, а радиусы окружностей относятся как $11 : 16$.

6. Ровно в 11:00 из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта A прошел некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт B , из пункта B в пункт

А выехал мотоциклист. Когда до пункта А оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придет пешеход в пункт А, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт А ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC , перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K , так что $CK : KD = 2 : 3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS , параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES .

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157 + \log_a^2 \cos \frac{x}{a} + \log_a \cos^{12} \frac{x}{a}} + \sqrt{29 + \log_a^2 \sin \frac{x}{a} + \log_a \sin^4 \frac{x}{a}} + \sqrt{47 + \log_a^2 \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \log_a \operatorname{tg}^6 \frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

4 вариант

1. Найдите $f\left(\frac{5}{3}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{4}{9}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2 + ax + 10 = 0$ равна 3. Найдите все возможные значения a .

3. Решите уравнение $2 \cos 2x + 3 \sin 2x + 4 \cos^2 x = -1$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_x 7} (1 + \log_7^2 x) \leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке P . Хорда QR внешней окружности касается внутренней окружности в точке S . Прямая PS пересекает внешнюю окружность в точках P и S . Найдите QT , если известно, что $PQ \parallel RT$, площадь четырехугольника $PQTR$ равна $5\sqrt{5}$, а радиусы окружностей относятся как 7 : 10.

6. Ровно в 13:00 из пункта А в пункт В выехал мотоциклист. Проехав четверть пути, наблюдательный мотоциклист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошел некий пешеход. В тот самый момент, когда мотоциклист прибыл в пункт В, из пункта В в пункт А выехал автомобиль. Когда до пункта А оставалось пятая часть пути, не менее наблюдательный водитель автомобиля заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько приехал автомобиль в пункт А, если известно, что пешеход прибыл в пункт А ровно в 17:00? Скорости пешехода, мотоцикла и автомобиля считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 10. Плоскость π параллельна ребру LM , перпендикулярна плоскости OPV и пересекает ребро MN в точке T , так что $MT : TN = 1 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость MNV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани NOV .

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65 + \log_a^2 \cos ax - \log_a \cos^8 ax} + \sqrt{10 + \log_a^2 \sin ax + \log_a \sin^2 ax} + \sqrt{125 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax - \log_a \operatorname{tg}^{10} ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

Ответы

1 вариант

1. $\frac{29}{35}$. 2. $a = \pm 1$. 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; 3)$. 5. $8\sqrt{2}$. 6. В 12:00.
7. $25\sqrt{2}$. 8. $9\sqrt{5}$, $a = 2$, $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 вариант

1. $\frac{41}{12}$. 2. $a = \pm 3$. 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$. 5. 2. 6. В 13:00.
7. $4\sqrt{2}$. 8. $8\sqrt{5}$, $a = 2$, $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 вариант

1. $\frac{11}{14}$. 2. $a = \pm 5$. 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 11 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x \in \left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup [5; +\infty)$. 5. 32. 6. В 13:30. 7. $49\sqrt{2}$. 8. $11\sqrt{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 вариант

1. $\frac{37}{18}$. 2. $a = \pm 7$. 3. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 7 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x \in \left(0; \frac{1}{7}\right) \cup (1; 7]$. 5. 3. 6. В 14:00. 7. $9\sqrt{2}$. 8. $10\sqrt{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.